

Análise de abordagens à Integral Definida em pesquisas brasileiras

Janine Freitas Mota¹

Resumo: O estudo aqui retratado orienta-se pelo objetivo de conhecer a abordagem dada aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida em algumas pesquisas brasileiras. Para a coleta de dados, foi realizado levantamento de 15 dissertações e teses em dois repositórios, sendo que essas foram lidas e fichadas. O referencial teórico reporta-se ao Enfoque Ontossemiótico, a partir de suas facetas: epistêmica, mediacional, interacional, cognitiva, afetiva e ecológica, as quais orientaram a análise. Como resultados, identificamos que os trabalhos apresentam fundamentos acerca da evolução da compreensão do conceito da Integral Definida; seus resultados fortalecem a importância de novos estudos e pesquisas com futuros professores de Matemática, com a finalidade de aprimorar os conhecimentos didático-matemáticos e as competências deles, o que, certamente, contribuirá para a sua futura prática profissional; sendo que os processos de mediação possibilitam o aprimoramento do trabalho docente.

Palavras-chave: Educação Matemática. Enfoque Ontossemiótico. Cálculo Diferencial e Integral.

Analysis of approaches to the Definite Integral in Brazilian research

Abstract: The study portrayed here is guided by the objective of understanding the approach given to the teaching and learning processes of Definite Integral in some Brazilian research. For data collection, 15 dissertations and theses were collected from two repositories, which were read and registered. The theoretical framework refers to the Ontosemiotic Approach, based on its facets: epistemic, mediational, interactional, cognitive, affective and ecological, which guided the analysis. As results, we identified that the works present fundamentals about the evolution of understanding of the concept of the Definite Integral; its results strengthen the importance of new studies and research with future Mathematics teachers, with the aim of improving their didactic-mathematical knowledge and skills, which will certainly contribute to their future professional practice; and mediation processes enable the improvement of teaching work.

Keywords: Mathematics Education. Ontosemiotic Approach. Differential and Integral Calculus.

Análisis de la discusión dada a Integral Definida en pesquisas brasileñas

Resumen: El estudio aquí presentado tiene como objetivo comprender la discusión dada a los procesos de enseñanza y aprendizaje de Integral Definida en algunas investigaciones brasileñas. Para la recolección de datos se recolectaron 15 disertaciones y tesis de dos repositorios, las cuales fueron leídas y registradas. El marco teórico hace referencia al Enfoque Ontosemiótico, a partir de sus facetas: epistémica, mediacional, interaccional, cognitiva, afectiva y ecológica, que guiaron el análisis. Como resultados, identificamos que los trabajos presentan fundamentos sobre la evolución de la comprensión del concepto de Integral Definida; sus resultados fortalecen la importancia de nuevos estudios e investigaciones con los futuros docentes de Matemáticas, con el objetivo de mejorar sus conocimientos y habilidades

¹ Universidade Estadual de Montes Claros (Unimontes) — Montes Claros (MG), Brasil.

✉ janine.mota@unimontes.br  <https://orcid.org/0000-0003-1653-9521>.

didático-matemáticos, lo que sin duda contribuirá a su futura práctica profesional; y los procesos de mediación posibilitan la mejora de la labor docente.

Palabras clave: Educación Matemática. Enfoque Ontosemiótico. Cálculo Diferencial e Integral.

1 Contextualização do estudo

No âmbito da linha de pesquisa *Educação Matemática no Ensino Superior*, estudos têm sido realizados sobre variados temas e conteúdos que são presentificados nas propostas de ensino e de aprendizagem de diferentes cursos, nas quais a Matemática é tomada como um conjunto de conhecimentos para modelar, problematizar e compreender problemas e situações referentes à atuação profissional de seus estudantes (Mota, 2021).

Em tais propostas, o Cálculo Diferencial e Integral tem sido um campo recorrente de estudo, em particular, a Integral Definida como conteúdo essencial para a formação de graduandos em diferentes cursos, sejam eles bacharelados ou licenciaturas.

A partir do objetivo de *conhecer a abordagem dada aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida na pesquisa brasileira*², intencionamos discutir o que se tem produzido de resultados e quais tendências são evidenciadas. Para tanto, acentuamos a dimensão epistemológica da Integral Definida, associada às características do saber em jogo; a dimensão cognitiva, com reflexões acerca dos conhecimentos didáticos, mobilizados em associação às características cognitivas relativas aos processos de ensino e de aprendizagem, quanto às concepções e dificuldades de estudantes.

2 Aporte teórico

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) apresenta características metodológicas próprias e fornece uma série de ferramentas que permitem analisar os processos de ensino e de aprendizagem de um objeto de estudo (Godino *et al.*, 2014). Essas ferramentas possibilitam revelar fatos didáticos significativos que definem orientações para a determinação de um percurso didático adequado ao estudo da Integral Definida.

² O presente artigo é recorte da tese de doutorado, de minha autoria, defendida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, sob a orientação da Profa. Dra. Celina Aparecida Almeida Pereira Abar.

As facetas que condicionam a aprendizagem propostas pelo EOS, quais sejam, epistêmica, mediacional, interacional, cognitiva, afetiva e ecológica, conduzem a ferramentas teóricas e metodológicas que possibilitam uma análise detalhada do objeto de estudo. Passaremos a explorar cada uma das facetas do EOS:

Epistêmica — os significados institucionais (sistema de práticas compartilhado no âmbito de uma instituição) postos em ação em cada uma das fases do processo de estudo são determinados e identificados em termos das práticas, configurações de objetos e processos matemáticos. As relações e restrições institucionais que condicionam o processo de estudo é observado. No presente estudo, abordamos as características e evolução do objeto matemático de investigação didática (Integral Definida) e utilizamos as configurações epistêmicas da Integral, que contempla a diversidade de significados que esse conceito pode ter, de acordo com suas diferentes estruturas institucionais e contexto de uso.

Cognitiva — os significados pessoais (sistema de práticas realizados por uma pessoa em diferentes momentos do processo de estudo) são descritos, em termos das práticas pessoais, configurações cognitivas dos objetos e processos matemáticos. No estudo, essa faceta está relacionada às dificuldades que os estudantes enfrentam ao resolver problemas relacionados com o conceito de Integral Definida; como esses estudantes aprendem, fundamentam e entendem esse conceito, progredindo em suas aprendizagens.

Afetiva — a sensibilidade do processo aos aspectos afetivo, emocional, atitudinal e nas crenças acerca dos objetos matemáticos e no processo de estudo em desenvolvimento é analisada. Procuramos, na abordagem de Integral Definida, a identificação desses aspectos.

Interacional — está relacionada ao ensino do tema em estudo, organização e gestão das tarefas que contemplam as características operacionais do sistema de práticas, em que são propostas situações-problema que buscam enriquecer o campo de práticas abordadas acerca dos conceitos.

Mediacional — são descritos os recursos técnicos (previstos ou utilizados), assim como a utilização do tempo destinado às ações e processos realizados, como também a identificação dos agentes participantes e o seu papel. No presente estudo, atentamo-nos para o conhecimento dos recursos (tecnológico, material e temporário) para potencializar a aprendizagem de conceitos inerentes à Integral Definida.

Ecológica — as relações entre conteúdo matemático e outras disciplinas, além das restrições institucionais que condicionam o processo de estudo é observado. Ainda, o entendimento de como o processo de estudo se ajusta às questões curriculares, sociais, políticas, econômicas, entre outras, como também ao ambiente em que se desenvolve.

Conforme os estudos de Godino *et al.* (2014) e Godino (2011, 2017), essas facetas são consideradas em vários níveis: as práticas ou ações dos agentes envolvidos, as configurações dos objetos intervenientes, as regras que condicionam e apoiam o desempenho das práticas e a avaliação da adequação da proposta didática.

3 Procedimentos metodológicos

O objetivo e a proposta de estudo direcionam à pesquisa do tipo análise documental. Para o levantamento da produção científica, que tem por temática os processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida, consultamos o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Primeiramente, selecionamos pesquisas, em nível de doutorado, no período de 2014 a 2018, usando a expressão “Ensino de Cálculo Integral”. O filtro foi realizado também pela grande área de conhecimento “Multidisciplinar”, seguido da área de conhecimento “Ensino de Ciências e Matemática”. Obtivemos 839 registros, dos quais selecionamos, pelo título, 176 trabalhos — fizemos a leitura dos títulos e descartamos aqueles que não tinham relação ao escopo objetivado.

Em seguida, fizemos a leitura dos resumos desses 176 trabalhos e então selecionamos aqueles com algum direcionamento, de acordo com seu título e com o seu resumo, para o ensino e a aprendizagem da Integral Definida. Ampliamos a busca no *Google Acadêmico*, ampliando o recorte temporal, usando os mesmos critérios para refinamento do levantamento, sendo selecionadas, ao todo, 15 dissertações e teses, conforme apresentação no Quadro 1.

A partir da leitura minuciosa de cada trabalho em sua íntegra, elaboramos um fichamento para melhor organizar os dados extraídos e estruturar a análise — questões de pesquisa, objetivos, referenciais teóricos, procedimentos metodológicos, resultados e considerações produzidas.

Quadro 1: Lista de trabalhos utilizados na revisão bibliográfica

Ano de Conclusão	Autor	Título	Tipo
2006	GONZÁLEZ-MARTÍN, Alejandro Santiago	La generalización de la integral definida desde las perspectivas numérica, gráfica y simbólica utilizando entornos informáticos. Problemas de enseñanza y de aprendizaje.	Tese
2010	RIBEIRO, Marcos Vinícius	O ensino do conceito de Integral, em Sala de Aula, com Recursos da História da Matemática e da resolução de problemas	Dissertação
2011	ANDERSEN, Érika	As ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo mobilizadas por alunos de licenciatura em Matemática	Dissertação
2012	CRISOSTOMO, Edson	Idoneidad de procesos de estudio del Cálculo Integral em la Formación de Profesores de Matemáticas: una aproximación desde la investigación em Didáctica del Cálculo y el Conocimiento Profesional.	Tese
2013	CARGNIN, Claudete	Ensino e aprendizagem da integral de Riemann de funções de uma variável real: possibilidades de articulação da utilização de Mapas Conceituais com a Teoria dos Registros de Representações Semióticas	Tese
2014	VOGADO, Gilberto Emanuel Reis	O ensino e a aprendizagem das ideias preliminares envolvidas no conceito de Integral por meio da resolução de problemas	Tese
2014	APOLINAR, Efraín Soto	Significados institucionales y personales del concepto de Integral Definida de funciones de una variable en una institución educativa de Nivel Superior	Tese
2015	REIS, Thiago Linhares Brant	Integral Definida: conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem	Dissertação
2015	BRANDÃO, Ana Karine Dias Caires	Integral Definida: um signo a compreender	Dissertação
2016	OLIVEIRA, Joao Lucas de	A utilização de <i>softwares</i> dinâmicos no ensino de Análise Real: um estudo sobre a construção do conceito de Integral de Riemann	Dissertação
2016	ROCHA, Irã Assis.	Evolução do conceito de Função Integrável	Tese
2017	ALMEIDA, Marcio Vieira de	Material para o ensino do Cálculo Diferencial e Integral: referências de Tall, Gueudet e Trouche	Tese
2018	MIRANDA, Gina Magal Horvat	Esculturas matemáticas: atividades para o estudo da Integral Dupla	Tese
2018	COMETTI, Márcio Antônio	Discutindo o ensino de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem.	Dissertação
2018	MENONCINI, Lucia	O Jogo das Operações Semióticas na aprendizagem da Integral Definida no cálculo de área	Tese

Fonte: Elaboração própria com base no levantamento no Catálogo de Teses e Dissertações (CAPES) e no Google Acadêmico

Passaremos à apresentação dos trabalhos, considerando as facetas

abordadas no EOS — epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional, mediacional e ecológica. Para otimizar a categorização dos trabalhos, fizemos uma opção de junção entre as facetas, definindo, dessa forma, três categorias: epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva e instrucional. Salientamos que tal categorização tem caráter didático e organizacional, conforme os pressupostos da estrutura teórica desta pesquisa.

4 Categoria epistêmica-ecológica

Incluimos, nessa categoria, os trabalhos de Rocha (2016), Ribeiro (2010), Crisostomo (2012) e Apolinar (2014) que abordam contextos referentes a tarefas, ações, linguagens, regras (definições, propriedades, procedimentos) ou argumentos, que podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles.

Rocha (2016) aborda a evolução do conceito de integral e de função integrável com a hipótese geral: “o progresso das Ciências e da Matemática foi concebido, até certo grau, como um processo de desenvolvimento de seus objetos e de sua particular noção de realidade” (p. 16). Para tanto, apontou três referências: histórica, filosófica e matemática.

A abordagem histórica e matemática trata da evolução do conceito de função, de continuidade e de integrabilidade, com destaque para o fato de que o conceito de função contínua possibilitou a evolução do cálculo de medidas de áreas de figuras planas, usando o conceito de Integral.

A hipótese de que o desenvolvimento das Ciências e da Matemática envolveu a construção dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral foi confirmada por Rocha (2016), ratificando que esses conceitos evoluíram ao longo da história, resultando nas definições e propriedades da Integral Definida ensinadas nos cursos de Ciências Exatas atualmente.

Didaticamente, baseando nesses pressupostos históricos conceituais, a origem epistemológica do conceito da Integral tem um potencial para a aprendizagem dos estudantes. Almouloud (2007) enfatiza que, analisando, epistemologicamente, o desenvolvimento histórico do conceito, é possível fazer a identificação de concepções sobre um objeto, assim como realizar agrupamentos em classes pertinentes para uma análise didática.

Ribeiro (2010) traz uma proposta de ensino que aborda essa perspectiva. Em

sua pesquisa, investigou a possibilidade de se construir um projeto de ensino destinado a trabalhar conceitos referentes às Integrais com estudantes de um curso de Engenharia, em um ambiente de resolução de problemas, fazendo uso da História da Matemática e com os estudantes, em grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, sendo construtores de um conhecimento autogerado.

A resolução de problemas de Romberg foi a metodologia de pesquisa destacada nesse trabalho, em que foi selecionada uma lista com 30 trinta problemas como geradores do conceito de Integral. Foram desenvolvidas, por Ribeiro (2010), nove atividades com o objetivo de alcançar os conceitos de Integral Simples e Integral Dupla em coordenadas retangulares.

Crisostomo (2012) traz em seu trabalho ferramentas do EOS aliadas aos processos cognitivos do Pensamento Matemático Avançado, utilizadas numa reflexão acerca da evolução do conceito de Integral e suas implicações para os processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo. Em sua pesquisa, traz contribuições para formação de professores de Matemática, apresentando informações acerca de como elaborar projetos instrucionais de qualidade, com referência ao tema Integral, em uma estrutura socioprofissional do curso de Matemática no Brasil.

A pesquisa de Crisostomo (2012) destaca as seguintes conclusões sobre a aprendizagem das noções de Cálculo: a complexidade das noções de Cálculo e a linguagem utilizada estão relacionadas às dificuldades dos estudantes, que precisam ser motivados para desenvolverem atitudes reflexivas, flexíveis e autônomas; o uso de problemas do cotidiano é essencial no ensino de Cálculo e requer mais tempo para aprofundar conceitos e propriedades; a transição entre diferentes representações, a integração entre teoria e prática, e o uso de recursos tecnológicos são aspectos cruciais no processo de aprendizagem da Integral; é importante considerar os estilos de aprendizagem dos estudantes para um ensino eficaz.

Por conta da natureza multifacetada dos significados da Integral Definida, evidenciamos outros estudos que discutem as relações, limitações e avanços da constituição epistemológica do conhecimento acerca desse tópico matemático.

Apolinar (2014) também utiliza o EOS para o desenvolvimento de um trabalho qualitativo, no qual propôs o uso de uma plataforma *on-line* para a disponibilização de materiais e tarefas extracurriculares, utilizadas no desenvolvimento de um processo instrucional que trata dos significados institucionais e pessoais do conceito de Integral

Definida, de funções de uma variável, com estudantes de cursos de Engenharia.

Esse pesquisador enfatiza a importância de permitir que os estudantes construam o conceito de Integral de funções de uma variável, com base em contextos e interesses pessoais. Isso é evidenciado em sua proposta de ensino do Cálculo, que considera as dimensões epistemológica, psicopedagógica e social do currículo, destacando conteúdos relevantes para que os estudantes possam aplicar esses conceitos na resolução de problemas de Engenharia de seu interesse.

A pesquisa de Apolinar (2014) destaca observações que podem auxiliar na compreensão da Integral Definida: a) a abordagem com base em conceitos como infinito e infinitesimais pode parecer abstrata aos estudantes; b) a maneira de dividir o todo é importante e desafiadora na compreensão da Integral Definida, mas pode ser facilitada pelo foco no processo de "pegar o elemento diferencial" e na discussão de problemas que envolvam diferentes formas de dividir o todo; c) o contexto do problema pode dificultar o cálculo da medida de uma grandeza; portanto, problemas devem ser selecionados de forma que a relação entre as quantidades seja explicada para calcular a medida da grandeza em estudo; d) o uso de sólidos tridimensionais pode ser difícil de compreender para alguns estudantes, afetando a compreensão do problema; e) os conceitos matemáticos básicos estão interligados à compreensão da Integral Definida, e é necessário avaliar o nível de compreensão deles; f) a avaliação tradicional pode ser substituída por uma avaliação analítica para ajudar os estudantes a compreender os procedimentos utilizados na Integral Definida e os conceitos relacionados.

Nosso propósito, nesta seção, foi de apresentar estudos e pesquisas selecionadas que trazem fundamentos acerca da evolução da compreensão do conceito da Integral Definida, em uma abordagem epistêmica-ecológica, para reflexão acerca do aperfeiçoamento de práticas integradas aos processos de ensino desse tema matemático.

5 Categoria cognitiva-afetiva

Incluimos na categoria cognitiva-afetiva as observações das investigações de Andersen (2011), González-Martín (2006), Vogado (2014) e Brandão (2015), que nos auxiliaram na compreensão de que, no processo de ensino da Integral Definida, é esperado que os estudantes desenvolvam processos cognitivos que corroborem com

a compreensão dos objetos que compõem a definição dos conceitos: infinitesimais, convergência, somatório, limites, dentre outros. Todavia, esse processo não é instantâneo e passa por várias etapas, por isso a preocupação no ensino estruturado desse conteúdo.

A pesquisa de Andersen (2011), por exemplo, trata das ideias centrais do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), mobilizadas por estudantes de Licenciatura em Matemática e teve como objetivo investigar quais processos mentais podem intervir e serem combinados, por estudantes, no desenvolvimento de atividades envolvendo a expressão $F(x) = \int_a^b f(t)dt$, verificando se essas atividades podem favorecer a compreensão dos conceitos relativos ao TFC.

Os aspectos relacionados às limitações nos processos de ensino e de aprendizagem dos estudantes, em relação ao TFC, foram abordados por essa pesquisadora, ancorados no Pensamento Matemático Avançado (PMA), com estudos de Dreyfus (1991), tendo destaque para a falta de abordagem gráfica para o TFC durante as aulas e a consequente dificuldade dos estudantes em interpretar, geometricamente, esse teorema; desconhecimento dos estudantes sobre a relação entre o TFC e os conceitos de derivada e integral, entre outros aspectos.

González-Martín (2006) aborda, em sua investigação, três dimensões das Integrais Impróprias: a) dimensão epistemológica — aborda a evolução da representação da Integral nos diferentes registros, incluindo a predominância do registro algébrico, mudanças epistemológicas da Integral (discreto *versus* contínuo, infinito *versus* finito) e a redução ao registro algébrico; b) dimensão didática — enfatiza práticas de ensino, como o uso de algoritmos no ensino das Integrais Impróprias, a importância da representação gráfica, a falta de tempo suficiente no curso e a existência de equívocos na cultura matemática universitária; c) dimensão cognitiva — apresenta fatores que dificultam a aprendizagem significativa dos conceitos relacionados à Integral Imprópria, incluindo desafios na mobilização de representações em diferentes registros e na compreensão das relações da Integral Imprópria com outros conteúdos.

Os resultados da pesquisa de González-Martín (2006) indicam que os estudantes têm preferência por declarações e cálculos no registro algébrico, em detrimento de interpretação dos resultados. Além disso, questões de raciocínio e pedidos de interpretação não foram abordados satisfatoriamente, e os estudantes

demonstraram dificuldades em compreender o significado da Integral.

Também percebendo as dificuldades dos estudantes da graduação, no entendimento de conceitos relacionados à disciplina Cálculo Diferencial e Integral, e na resolução de problemas de áreas como Física, Biologia, Vogado (2014) utilizou a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, por meio da Resolução de Problemas, para fazer de um problema um ponto de partida para a aprendizagem dos conceitos introdutórios da Integral. Assim, indicou a hipótese de que a introdução ao conceito de Integral, por meio da resolução de problemas, poderia apresentar aos estudantes aspectos sobre noções desse conceito.

Nas conclusões de sua pesquisa, Vogado (2014) destaca que, ao longo do desenvolvimento das atividades, observou-se: predominância de aspectos algorítmicos e, em menor grau, intuitivos; a maioria dos estudantes superou obstáculos na aprendizagem inicial do conceito de Integral por meio da resolução de problemas, com o uso do *software* GeoGebra. No entanto, surgiram dificuldades na expressão dos argumentos utilizando a linguagem matemática. O pesquisador enfatiza que conhecer apenas a definição de um conteúdo matemático não é suficiente para resolver problemas, pois é necessário desenvolver habilidades específicas para essa finalidade.

Vogado (2014) declara que, para o estudante alcançar processos cognitivos elaborados, como generalização e abstração, ele deve iniciar gradualmente sua compreensão, partindo de conceitos iniciais, que o levem ao conhecimento da definição. No caso das Integrais Definidas, uma construção do conceito poderia ser iniciada pelas Somas de Riemann, por exemplo, para, assim, desencadear a definição formal com todos os seus elementos. Do mesmo modo, apontamos para as relações que podem existir entre as representações gráficas das Integrais, propriedades e aplicações e, ainda, a relação entre o Cálculo Diferencial e Integral estabelecida pelo TFC, além de outros.

Brandão (2015) trouxe como tema de investigação as contribuições do uso das linguagens para a aprendizagem do conceito de Integral Definida, na perspectiva semiótica. A metodologia usada se constituiu no desenvolvimento, aplicação e análise de uma sequência de ensino que aborda conceitos da Integral Definida: introdução ao conceito de Soma de Riemann, intuitivamente; demonstração e aplicação do TFC; e aplicação de situações-problema envolvendo o TFC.

Os resultados dessa investigação apontaram que os estudantes dão importância à linguagem oral para a compreensão do conhecimento matemático, sendo que, para eles, a escrita é a linguagem natural para expressar tal conhecimento e que a Matemática comporta tanto a linguagem escrita como a oral. Também é salientado que o uso da linguagem oral pelos estudantes, no processo de relacionar os signos matemáticos com os significados para a compreensão e resolução de situações-problema, contribuiu para a aprendizagem do conceito da Integral Definida de funções de uma variável.

Destacamos que os resultados das pesquisas, levantados na categoria cognitiva-afetiva, fortalecem a importância de novos estudos e pesquisas com futuros professores de Matemática, com a finalidade de aprimorar os conhecimentos didático-matemáticos e as competências deles, o que, certamente, contribuirá para a sua futura prática profissional.

6 Categoria instrucional

Incluimos nessa categoria as investigações de Almeida (2017), Cargnin (2013), Oliveira (2016), Menoncini (2018), Cometti (2018) e Reis (2015), que nos possibilitam discussão acerca das mediações docentes, dos recursos instrucionais e tecnológicos que intentam contribuir para a aprendizagem referente ao conceito da Integral Definida. Consideramos que os recursos e estratégias que possibilitam práticas docentes eficazes são diversos, dentre esses, citamos os recursos tecnológicos.

Almeida (2017) apresenta um estudo em que se debruça sobre os conceitos relacionados à Integral e a preparação de materiais utilizando *software*, com o intuito de preencher a lacuna da necessidade de produção e disponibilização de materiais. Ele traz uma abordagem norteada por constructos teóricos dos pesquisadores David Tall; Ghislaine Gueudet e Luc Trouche, aplicados à produção de materiais para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral, abordando os conteúdos: função, continuidade, diferenciabilidade, solução de uma equação diferencial, integral e limite de seqüências. Apresenta atividades que compõem um repertório de recursos que pode ser utilizado pelo professor no seu processo de documentação para a preparação de aulas no ensino de Cálculo, trazendo o uso do computador e a manipulação de ferramentas no *software* GeoGebra na produção de materiais, incluindo aplicações disponibilizadas, de modo *on-line*, para o estudante.

Almeida (2017) conclui que as aplicações desenvolvidas com o GeoGebra coadunam com as características de um *software* para aprendizagem matemática, favorecendo o desenvolvimento cognitivo do estudante, a fim de promover a exploração e investigação de conceitos matemáticos. Ressalta que o material produzido amplia o conjunto de recursos do professor na organização das aulas e que isso auxilia na exposição e incorporação de resultados de pesquisas na produção de materiais para o ensino, contribuindo na relação teoria e prática. É evidenciada a importância de se utilizar um constructo teórico de natureza cognitiva, no desenvolvimento de material para o ensino de Cálculo, pois assim se dará a aproximação da teoria ao repertório de recursos utilizados pelo professor, implementando os resultados das pesquisas em Educação Matemática em sala de aula.

Cargnin (2013) utilizou mapas conceituais como ferramentas de ensino para ajudar os estudantes a compreender o conceito de Integral Definida. Ele desenvolveu uma abordagem de ensino que envolveu os alunos na discussão de aspectos matemáticos relacionados à Integral de Riemann para funções de uma variável real, de forma mais ativa e autônoma em comparação às aulas tradicionais de Cálculo.

As atividades propostas incluíram o conceito de convergência e sequências numéricas, essenciais para entender a Integral Definida, assim como o limite de somas finitas. Também exploraram a notação de somatório na Integral de Riemann, somas parciais e o conceito de Integral como soma de áreas. Foram abordados conceitos-chave relacionados à Integral Definida segundo Riemann, com tarefas envolvendo o cálculo de medida de áreas.

Os resultados obtidos por Cargnin (2013) destacam que: as dificuldades de relacionar o limite ao conceito de Integral foram reduzidas por meio do desenvolvimento de processos cognitivos dos estudantes; a criação de mapas conceituais pelos estudantes ajudou na compreensão de conceitos-chave relacionados à Integral de Riemann; a análise desses mapas permitiu ao professor identificar obstáculos didáticos na compreensão da Integral Definida e confronto dos conceitos-chave de docentes e discentes.

Oliveira (2016) se propôs a identificar contribuições da utilização de *softwares* dinâmicos para a construção do conceito de Integral de Riemann. Propôs uma abordagem desse tema na disciplina Análise Real, à luz dos processos do PMA e da

relação entre rigor e intuição, com o uso de recursos tecnológicos. A metodologia utilizada constituiu-se de um estudo de caso, cujos colaboradores eram professores de universidades federais, que responderam a entrevistas semiestruturadas.

Nessa pesquisa, os significados da Integral de Riemann foram abordados em consonância com os aportes teóricos do EOS, sendo os seis tipos de objetos matemáticos (linguagens, situações, conceitos/definições, proposições/propriedades ou atributos, procedimentos ou argumentos) introduzidos na investigação, obtendo um aprofundamento das atividades matemáticas. Em cada situação proposta, os objetos se relacionaram, formando configurações — redes de objetos intervenientes e emergentes dos sistemas de práticas.

Essa pesquisa mostrou que é possível relacionar os significados intuitivos do Cálculo com a formalização na disciplina de Análise. O uso do *software* GeoGebra foi apontado como benéfico para compreender a Integral de Riemann na transição entre o Cálculo e a Análise, melhorando a interação entre estudantes e professores. No entanto, foram apontadas limitações desse, especialmente relacionadas à generalização incorreta de propriedades de exemplos específicos em contextos diferentes.

Menoncini (2018) investiga, em sua pesquisa, a forma que os estudantes utilizam operações semióticas na aprendizagem da Integral no cálculo de medidas de áreas, trazendo aspectos relacionados ao livro didático. Foi desenvolvida uma sequência didática que explorou a diversidade de registros de representação e operações semióticas, dentre as quais tratamentos e conversões. Utilizou o *software* GeoGebra para o esboço de curvas e para conversões de representações produzidas nos registros gráfico-geométrico e algébrico, proporcionando um ambiente de experimentação.

As observações realizadas por essa pesquisadora permitiram reconhecer o enfoque metodológico dado por alguns autores, ressaltando que esse tratamento também é utilizado por professores em sala de aula, uma vez que o livro muitas vezes é o principal ou o único material usado no ensino. A pesquisadora conclui que decorre daí a importância da produção de materiais didáticos que possam fazer a inserção de novos elementos a serem discutidos no processo instrucional.

Cometti (2018), sob a forma de atividades exploratórias, elaborou, aplicou e analisou sequências de atividades relacionadas à construção de superfícies e sólidos

para o ensino de Integrais para estudantes de um curso de Engenharia. Ele destaca que o uso de representações geométricas se faz necessário ao se abordar o estudo nas Integrais Múltiplas, no que se refere às chamadas regiões de integração. Afirma que o uso de recursos computacionais favorece a visualização e a interpretação dessas regiões, já que são o ponto principal relativo a esse tema do Cálculo. Com as atividades, ele buscou promover a compreensão da representação das interseções entre as superfícies quádricas e os planos, do ponto de vista geométrico.

Como resultados, Cometti (2018) concluiu que as sequências didáticas propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão, atentando para os detalhes e informações contidas em cada registro usado, em que ficou evidenciado que o processo de visualização proporcionado pelo uso do *software* se mostrou um componente indispensável para os processos de construção dos principais conceitos e propriedades das Integrais Múltiplas e que as atividades ligadas à exploração de características visuais, quando são realizadas sob a orientação de um professor ou em um processo instrucional, podem levar a resultados com maiores potenciais de aprendizagens.

Reis (2015) apresenta conteúdos de ensino e estratégias de aprendizagem relacionados à Integral Definida. Foi construída uma proposta metodológica que abordou os conteúdos de aprendizagem factuais, conceituais, procedimentais, atitudinais, com o propósito de que as atividades envolvessem aspectos algébricos, numéricos, gráficos e geométricos.

O termo conteúdo, utilizado nesta investigação, transcende o simples caráter cognitivo, ampliando para, conforme Zabala (1998, p. 30), conteúdo de aprendizagem, entendido como “tudo quanto se tem que aprender para alcançar determinados objetivos que não apenas abrangem as capacidades cognitivas, como também incluem as demais capacidades”.

A análise qualitativa dos resultados dessa investigação evidenciou a superação de dificuldades, a evolução do conhecimento e de habilidades dos estudantes no desenvolvimento das atividades, mostrando maior independência e confiança na resolução das tarefas. Segundo Zabala (1998), o professor, ao elaborar as atividades escolares, deve se propor a explorar esses conteúdos para levar o estudante a alcançar uma formação global.

Miranda (2018) desenvolveu, em sua investigação, um cenário para

aprendizagem por meio da impressão 3D, com atividades que envolveram a representação figural de sólidos, cuja representação algébrica é referenciada por funções de duas variáveis. Assim, buscou levantar e analisar as concepções dos estudantes de um curso de Engenharia para o conceito de Integral Dupla.

A elaboração das tarefas, propostas nessa investigação, se apoiou na Teoria da Cognição Corporificada. A metodologia usada foi o *Design Experiment* e a análise de dados foi realizada com base no Modelo de Estratégia Argumentativa (MEA). Essa pesquisadora, assim como Cargnin (2013), trabalhou com mapas conceituais, elaborando para cada atividade as possíveis montagens, esquematizando as reencenações que poderiam emergir em cada uma das tarefas.

Os resultados alcançados sugerem que o trabalho dinâmico com a representação gráfica das funções associadas à representação de esculturas pode estimular concepções valiosas para a compreensão do significado da Integral Dupla, identificando os significados da primeira integral, que está relacionada à concepção de área e da segunda integral, como volume de um sólido.

Miranda (2018) procurou contribuir para o ensino e a aprendizagem de Cálculo Diferencial Integral, oportunizando trabalhar Integral Dupla com uma dinamicidade maior e com o auxílio das tecnologias atuais.

As investigações contempladas, que foram remetidas à categoria instrucional, revelam, por um lado, processos de mediação que possibilitam o aprimoramento do trabalho docente, e por outro, uma reflexão sobre recursos que podem ser levados em consideração nos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida.

7 Discussão e considerações finais

Discutimos as contribuições de dissertações e teses que abordam aspectos teóricos, conceituais, metodológicos e práticos relacionados aos processos de ensino e de aprendizagem da Integral Definida. Nessa seção, apresentamos as convergências dos 15 trabalhos (Quadro 1), com destaque para as dificuldades de aprendizagem e possíveis competências a serem desenvolvidas pelos estudantes.

A importância da construção significativa de conhecimentos acerca de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral na área de Ciências Exatas foi destacada em todos os trabalhos selecionados, sendo observada a relação entre a Aritmética, a Álgebra e a Geometria ao longo das reflexões realizadas, sobretudo, nas dissertações

e teses que abordam aplicações geométricas da Integral Definida. Tal relação contribuiu para o desenvolvimento e busca por generalizações de conceitos e para a qualidade nos processos instrucionais. Ressaltamos ser importante que essa relação seja abordada pelo professor, em benefício do aprendizado do estudante, pois mostra o que está implícito no cálculo da Integral Definida.

As investigações, cujos participantes são estudantes de Licenciatura em Matemática, como em Andersen (2011), Vogado (2014), González-Martín (2016) e Menoncini (2018), fizeram-nos refletir acerca da possibilidade/necessidade de oferecer ao futuro professor oportunidades para vivenciar metodologias que concorram para a sua formação inicial, colaborando no desenvolvimento de sua autonomia, de seu poder de crítica e de conscientização de sua capacidade de construir os seus próprios conhecimentos.

A utilização de situações-problema que contextualizam as aplicações da Integral Definida e fazem a interlocução entre teoria e prática foi evidenciada na maioria dos trabalhos, considerando as múltiplas aplicações — na Matemática, Física, Biologia, Estatística, entre outras áreas — que podem se manifestar como motivação para levar o estudante à aprendizagem dos conceitos, como destacado em González-Martín (2006), Ribeiro (2010), Cargnin (2013), Vogado (2014), Reis (2015), Almeida (2017), Menoncini (2018), Miranda (2018) e Crisostomo (2012).

Essas investigações que trazem uma abordagem voltada para as aplicações da Integral Definida nos trazem ideias para a construção de propostas de ensino como, por exemplo, no desenvolvimento de atividades que aportam aos contextos intra e extramatemáticos.

Envolver os estudantes a fim de os tornar ativos no processo de aprendizagem do Cálculo foi reconhecido como uma atitude instrucional importante no processo de construção do conhecimento. Ribeiro (2010) e González-Martín (2006), por exemplo, destacam que o estudante pode vivenciar o que é fazer ciência, fazendo observações, experimentações e descobertas em atividades matemáticas, coadunando com Crisostomo (2012), ao retratar que a autonomia do estudante pode ser potencializada por meio de estratégias didáticas que lhes atribuam maiores responsabilidades de participação. Cargnin (2013) também destaca que uma maior autonomia discente na comunicação e na resolução de problemas pode impactar a construção dos seus significados pessoais, que poderão fazer reflexões sobre os aspectos envolvidos,

sendo essa uma ferramenta para que o professor identifique compreensões errôneas que o estudante obteve sobre conceitos estudados.

Pesquisas, como a de Reis (2015), trouxeram a superação de dificuldades, a evolução dos conhecimentos e das habilidades dos estudantes em relacionar conceitos, significados e procedimentos de Cálculo, seguidas do desenvolvimento da autonomia desses quanto ao estudo dos conceitos trabalhados. Pelo exposto, temos uma via de mão dupla, desenvolvimento da autonomia implicando evolução na aprendizagem.

Algumas dificuldades para a aprendizagem efetiva dos estudantes foram apontadas, em comum, nas dissertações e teses analisadas:

- a) carência de conhecimentos elementares e de formação de conceitos e definições matemáticas na Educação Básica (Crisostomo, 2012; Cargnin, 2013; Apolinar, 2014; Reis, 2015);
- b) falta de compreensão do estudante na articulação da Integral como o limite de uma adição de medidas de áreas de retângulos, sendo que as medidas das bases desses retângulos são infinitesimais — abordagens que antecipam a formalização conceitual podem gerar dificuldades na compreensão do conceito, das demonstrações e representações (González-Martín, 2006; Crisostomo, 2012; Apolinar, 2014);
- c) conceitualização da Integral baseada unicamente na noção de medida de área — há evidência de que alguns estudantes relacionam a noção de área a uma fórmula, apenas como um objeto aritmético, desconsiderando esse conceito como um objeto geométrico, gerando dificuldades na compreensão da Integral Definida, não estabelecendo a relação desse com novos problemas (González-Martín, 2006; Apolinar, 2014; Almeida, 2017; Menoncini, 2018);
- d) A tendência de excessiva algebrização ou algoritmização utilizada de maneira descontextualizada e mecanicizada — alguns estudos concordam que o desequilíbrio entre os componentes conceituais e algorítmicos no ensino da Integral Definida pode conduzir a problemas de compreensão, inviabilizando que o estudante desenvolva a capacidade de utilizar o conceito em situações novas, dando ênfase ao domínio de procedimentos de resolução de exercícios (abordagem mecanicista) ou memorização das definições e compreensão das

demonstrações dos teoremas (abordagem formal), (González-Martín, 2006; Ribeiro, 2010; Apolinar, 2014; Brandão, 2015). Menoncini (2018) reforça que essas características estão presentes em alguns livros textos de Cálculo, em que o registro gráfico-geométrico é utilizado apenas para fornecer o intervalo de integração e a função integrando;

- e) carência da abordagem gráfica para a Integral Definida, causando limitações cognitivas e didáticas (González-Martín, 2006; Andersen, 2011; Menoncini, 2018);
- f) dificuldades com a notação da Integral, sem que o estudante compreenda os significados de cada termo da notação, são apontadas por Cargnin (2013), Menoncini (2018), Crisostomo (2012) e Apolinar (2014);
- g) mobilização das representações em diferentes registros — alguns pesquisadores evidenciaram dificuldades relacionadas ao uso das operações de tratamento (âmbitos algébrico e gráfico e mudança de representações), afirmando que a transição entre as representações pode ser a chave para a aprendizagem das noções do Cálculo e para a generalização desses conceitos (González-Martín, 2006; Andersen, 2011; Cargnin, 2013; Apolinar, 2014; Brandão, Reis, 2015; Almeida, 2017; Menoncini, Cometti, Miranda, 2018);
- h) o distanciamento das aplicações das Integrais pode ser um problema, uma vez que o estudante não associa a parte teórica à parte aplicável dos conceitos vistos em CDI (González-Martín, 2006; Crisostomo, 2012);
- i) Andersen (2011) e Crisostomo (2012) apresentam que a maioria dos estudantes não tem domínio do Teorema Fundamental do Cálculo no primeiro ano de graduação e revelam que isso ocorre devido a estudos superficiais sobre funções e taxa de variação.

Algumas dessas dificuldades de aprendizagem podem ser percebidas em nossas salas de aulas, como temos observado em nossa prática (Mota, 2021) e como destacam Macêdo e Gregor (2020). De modo similar tem sido destacada em pesquisas que abordam processos de ensino e de aprendizagem na Educação Básica ou ações de formação de professores, como as de Rezende e Silva-Salse (2011), Utimura, Borelli e Curi (2020) e Figueiredo, Lobo da Costa e Llinares (2021). Diante desse cenário, torna-se necessário compreender os apontamentos presentes nessas

investigações e se apropriar deles.

Esse conhecimento é importante para os professores de Cálculo, para que possam desenvolver e experimentar estratégias de ensino que possibilitem uma construção progressiva da aprendizagem dos estudantes; e que essas estratégias possam respeitar os seus níveis de aprendizagens, que sejam criativas e motivadoras, além de serem fundamentadas na epistemologia do conhecimento matemático.

Alguns trabalhos abordam aspectos da semiótica como constructo teórico e evidenciam a compreensão do conceito matemático estudado com base no uso das múltiplas representações — linguagem falada/escrita, gráfica, numérica, algébrica, computacional. Essas investigações, como a de Brandão (2015), chamam a atenção para a ausência de um enfoque com diversidade de representações para os significados da Integral. González-Martín (2006) também ressalta a necessidade de compreensão e aprofundamento do conceito da Integral que auxilie os estudantes a interagir com os registros algébrico e gráfico. Essa hipótese é confirmada por Brandão (2015) ao afirmar que o uso das representações gráficas e algébricas permitiu aos estudantes, participantes de sua pesquisa, impulsionarem sentidos e significados para a aplicação da Integral Definida em situações-problema, contribuindo para a aprendizagem desse conceito.

Andersen (2011), Crisostomo (2012) e Cargnin (2013) também destacam a importância da transição entre as representações para a aprendizagem do Cálculo de modo a proporcionar aos estudantes um ambiente de experimentação que promova a diversidade de registros e o desenvolvimento de aspectos relacionados ao pensamento, visualização e escrita matemática.

Compactuando com essas refutações, Menoncini (2018) afirma que algumas aplicações da Integral Definida requerem a mobilização de representações em diferentes registros (algébrico, gráfico, numérico, língua materna); e enfatiza que atividades que impulsionam a conversão de representações entre registros incentivam o estudante a distinguir o objeto de sua representação.

O aspecto tecnológico possibilita que novos conceitos matemáticos possam ser entendidos pelo estudante, se esse tiver condições de relacioná-los aos seus conhecimentos prévios e de desenvolver representações mentais ricas desse conceito. Nessa ótica, Reis (2015), Cometti (2018) e Menoncini (2018) buscaram identificar as possíveis contribuições na utilização GeoGebra, relacionando-as aos

registros de representações semióticas. Esses pesquisadores reconhecem a capacidade que a tecnologia traz na apresentação das múltiplas representações de um mesmo objeto matemático. Os resultados observados, assim como na pesquisa de Miranda (2018), apontaram que o processo de visualização, auxiliado pelo GeoGebra, se mostrou um importante componente para os processos de compreensão dos principais conceitos e propriedades das Integrais, uma vez que o *software* intensifica o uso das operações de tratamento, nos âmbitos algébrico e gráfico, e a mudança de representações.

Esses trabalhos nos mostraram que atividades ligadas à exploração de características visuais que abordam aspectos de conversão podem ser bem aproveitadas e adquirem maiores potencialidades quando guiadas pelo professor ou por uma sequência didática.

Ficou evidenciado nos trabalhos analisados, que abordam a utilização de recursos tecnológicos, que o uso responsável desses contribui para a renovação das práticas de ensino, evitando que elas se tornem demasiadamente formais ou algorítmicas e ofereçam a possibilidade de desenvolver atividades matemáticas inovadoras, incluindo a relação entre os quadros algébrico, gráfico e tabular, com o objetivo de promover o trabalho experimental.

Ressaltamos que, em alguns trabalhos, foram apontadas limitações do *software* em uso, com destaque para o que Tall (1986) evidencia acerca da utilização errônea de um *software*, denominado por ele como um organizador genérico, que pode levar a representações desfavoráveis a construções de conceitos, nos quais propriedades de exemplos específicos podem ser generalizadas, equivocadamente, a contextos não equivalentes. Um exemplo disso, conforme destacado por Oliveira (2016, p. 128) em sua pesquisa, foi que “o uso do *software* apresentou uma limitação de finitude que pode levar à formação de intuições errôneas”.

Levantadas as dificuldades de compreensão dos estudantes nos conceitos relacionados ao Cálculo Integral, as dissertações e teses analisadas relatam resultados encorajadores àqueles que trabalham visando a que os estudantes progridam em suas aprendizagens nos cursos de Cálculo.

Como expectativa de pesquisas futuras, enumeramos alguns aspectos que foram abordados nas investigações.

Almeida (2017) e González-Martín (2006) abrem a possibilidade da proposição de seus projetos a outros estudantes ou professores, sugerindo a utilização dos materiais produzidos, como também os dados apresentados por suas investigações, alcançando maior equilíbrio entre as situações didáticas e a-didáticas e menos defasagens entre as análises *a priori* e *a posteriori*, destacando a importância dada à formulação e aplicação de materiais que abordem o ensino de Cálculo. Assim, propõem que estudos futuros poderiam auxiliar na complementação da classificação de dificuldades e obstáculos no ensino e fornecer maneiras de aliviar seus efeitos.

Apolinar (2014) ressalta a necessidade de se desenvolverem materiais didáticos que incluam o desenvolvimento de competências algébricas, manipulação de objetos tridimensionais, explicação e modelação matemática de fenômenos envolvidos em situações-problema. Sugere um estudo dos pré-requisitos de conceitos necessários para a compreensão da Integral Definida e uma avaliação analítica para outros conceitos do Cálculo, preconizando avaliações menos tradicionais que permitam aos estudantes enfrentar problemas, cuja solução envolva o estabelecimento de uma Integral Definida.

Também sugere um enfoque desse tema, articulado à abordagem leibniziana (emergência do conceito por meio do cálculo aproximado inicial da medida da grandeza que se pretende quantificar na sua totalidade) e à abordagem newtoniana (determinação da forma adequada de dividir o todo, de modo a tomar o elemento diferencial), em atividades que permitam aos estudantes a obtenção de esquemas para identificação de como o todo deve ser dividido corretamente, aumentando o número de estudantes que alcança a compreensão do conceito de Integral Definida.

González-Martín (2006) sugere o desenvolvimento de pesquisas que utilizam tecnologia nos processos instrucionais, haja vista o interesse no desenvolvimento de ambientes favoráveis para a integração e operacionalização dos distintos registros, facilitando a aprendizagem e abrindo caminhos para novas hipóteses, formas de se pensar e pesquisas relacionadas ao tema.

Oliveira (2016), nesse mesmo viés, destaca que a utilização de *softwares*, especificamente na formação do professor de Matemática, é uma questão deixada em aberto, com vistas a verificar se essa utilização traria mais significados aos conceitos que essa formação exigirá na relação com a Matemática trabalhada na Educação Básica, o que também é abordado por Andersen (2011), que interroga acerca de quais

os efeitos do uso de uma ferramenta computacional no ensino e aprendizagem de conceitos relacionados à Derivada e à Integral.

Miranda (2018) também evidencia o desejo de dar continuidade ao processo de investigação acerca das atualizações tecnológicas e/ou metodológicas, inovando as formas de abordagens de conteúdos. Sugere, por exemplo, a inclusão de uma tarefa que envolva a Integral Definida, pois evidenciou certa dificuldade dos participantes de sua pesquisa no cálculo de Integrais.

Cometti (2018) ressalta possibilidades de pesquisas futuras, relacionando outros conteúdos do Cálculo de várias variáveis à luz da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, abordando conceitos nos quais a utilização de tecnologias pode contribuir para reflexões importantes pelos professores-pesquisadores do Ensino Superior comprometidos com um ensino voltado para a aprendizagem com compreensão significativa.

Crisostomo (2012) destaca perspectivas de investigações relacionadas à formação de professores de Matemática: a) dos saberes profissionais dos professores formadores sobre outros objetos do Cálculo, para verificar o grau de coincidência com os resultados obtidos em sua pesquisa; b) da análise do conhecimento profissional de professores formadores sobre objetos didáticos de outras disciplinas e sua aplicabilidade no currículo da Licenciatura em Matemática; c) de viabilidade do desenho, planejamento e implementação dos processos de estudo da Integral (ou outros objetos do Cálculo), segundo o EOS; d) do conhecimento profissional dos professores formadores, sobre a Integral (ou outros objetos do Cálculo) em outras carreiras; e) de adequação do estudo de objetos do Cálculo, a fim de articular aulas teóricas e práticas, com o uso de recursos tecnológicos. Das questões deixadas em aberto nessa pesquisa, destacamos as segunda e quinta questões que se relacionam com os objetivos desta pesquisa e tiveram influência nesta investigação.

A necessidade de se produzirem significados para os conceitos matemáticos ensinados nas universidades, promovendo uma reconstrução do conhecimento alcançado e incentivando os estudantes a extrapolar o que já está posto por conhecimento científico é destacado por vários pesquisadores, como Brandão (2015) e Carginin (2013), que sugerem a realização de sequências de ensino que contemplem situações-problema envolvendo os conceitos do Cálculo, contribuindo para trazer dinamicidade às aulas, com maior participação discente. Nessa mesma perspectiva,

Andersen (2011) aponta para a inserção de atividades baseadas em um ensino por descoberta para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Cargnin (2013) considera urgente a aproximação entre as pesquisas acadêmicas e a sua utilização em sala de aula, destacando a importância de síntese das pesquisas existentes para os diversos conteúdos da Matemática que, individualmente, apresentaram benefícios, mas que nem sempre chegam à sala de aula. Assim, indica ações nos cursos de formação de professores de Matemática, envolvendo a vinculação dos objetos matemáticos às suas diversas representações; o trabalho com as conversões de representações entre registros, a fim de impulsionar os futuros professores a atuarem desse modo em sua prática profissional futura. Nesse contexto, trazemos esta pesquisa como uma contribuição que busca atender a esses aspectos.

Menoncini (2018) afirma que a equivalência de áreas pode ser um novo elemento a ser inserido no estudo da Integral, pois é um assunto não comumente abordado em livros textos de Cálculo. Ainda vislumbra o repensar de seu estudo, complementando-o com outras metodologias ou atividades, como, por exemplo, a modelagem matemática ou a proposição de atividades que retratem problemas reais.

Diante do exposto, esclarecemos que todas as dissertações e teses analisadas auxiliam na composição e evolução de pesquisas no contexto da Educação Matemática. Ressaltamos que nossa preocupação perpassa o conhecimento do desempenho matemático do estudante e a exploração dos conceitos da Integral Definida, chegando à observação das competências para identificação e utilização de objetos e processos matemáticos, seus significados e vínculos, fazendo uma análise da estrutura das práticas educativas em Matemática, objetos e processos que os estudantes acionam na resolução das atividades relacionadas à Integral Definida.

Referências

ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: EdUFPR, 2007.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991, p. 25-41.

FIGUEIREDO, S. A.; LOBO DA COSTA, N. M.; LLINARES, S. Olhar profissional para a docência com tecnologia: um estudo na formação continuada. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 5, n. 11, p. 1-23, 2021.

GODINO, J. D. Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la Educación Matemática. En: Actal del Congreso Internacional Virtual Sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Granada: Universidad de Granada, 2017, p. 1-20.

GODINO, J. D. Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. In: *Actas de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife: UFPE/IACME, 2011, p. 1-20.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico: semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 34, n. 2-3, p. 167-200, mai/déc. 2014.

MACEDO, J. A.; GREGOR, I. C. S. Dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1-24, 2020.

MOTA, J. F. **Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática**. 2021. 291f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) — Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2021.

REZENDE, A. A.; SILVA-SALSE, A. R. Utilização da aprendizagem baseada em problemas (ABP) para o desenvolvimento do pensamento crítico (PC) em Matemática: uma revisão teórica. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 5, n. 11, p. 1-21, 2021.

TALL, D. **Building and testing a cognitive approach to the Calculus using interactive compyter graphics**. 1986. 504f. Thesis (Doctorate in Mathematics Education) — Institute of Education. University of Warwick. Warwick.

UTIMURA, G. Z.; BORELLI, S. S.; CURI, E. Lesson Study (Estudo de Aula) em diferentes países: uso, etapas, potencialidades e desafios. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1-16, 2020.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Tradução de Ernani Ferreira da Fonseca Rosa. Porto Alegre: Artmed, 1998.