REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: CONTRIBUIÇÕES PARA O ESTUDO DO CONCEITO DE FUNÇÃO

SEMIOTIC REPRESENTATIONS: CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF FUNCTION CONCEPT

Vânia Bolzan Denardi

Universidade Federal de Santa Maria/vania_denardi@hotmail.com

Eleni Bisognin

Universidade Franciscana/eleni@ufn.edu.br

Resumo

Neste artigo apresenta-se os resultados de uma investigação que teve como propósito analisar uma trajetória hipotética de aprendizagem, realizada com alunos de um curso de formação inicial de professores de Matemática, para construção do conceito de função. Para tanto, adotou-se os pressupostos teóricos dos Registros de Representação Semiótica de Duval. A pesquisa de cunho qualitativo contou com a participação de dezesseis alunos matriculados na disciplina de Matemática Elementar de uma universidade pública, localizada no interior do estado do Rio Grande do Sul. A análise dos dados, os quais foram coletados por meio das produções dos alunos e das anotações do diário de campo da pesquisadora, foi realizada com base na tripla análise sugerida por Duval. Os resultados apontam para a superação de diversas dificuldades, sendo possível afirmar que ocorreu um avanço significativo na compreensão do conceito de função, ou seja, uma “progressão na aprendizagem” dos alunos.

Palavras-chave: Educação Matemática. Formação Inicial de Professores. Função. Registro de Representação. Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Abstract

In this article we present the results of an investigation that had as purpose to analyze a hypothetical trajectory of learning, carried out with students of a Mathematics teaching course , to construct the function concept. For that, the theoretical assumptions of Duval's Semiotic Representation Registers were adopted. The qualitative research was attended by sixteen students participants in the Elementary Mathematics course of a public university, located in the South of Brasil. Data analysis, which was collected through the students' productions and of the researcher's field diary notes, was carried out based on the triple analysis suggested by Duval.The results point to the overcoming of several difficulties, and it is possible to affirm that there was a significant advance in the understanding of function concept, that is, a "progression in learning" of the students.

Keywords: Mathematical Education. Initial Teacher Training. Function. Register of Semiotic Representation. Hypothetical LearningTrajectory.

Introdução

A pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior é uma área de interesse emergente (RASMUSSEN, MARRONGELLE e BORBA, 2014). A aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI), caracterizada tradicionalmente como desafiadora para o aluno que ingressa neste nível de ensino, tem sido responsável por boa parte desse interesse, uma vez que a disciplina "é uma das principais fontes de desestabilização da visão estática que o estudante tem sobre a Matemática e de perturbação de convicções construídas ao longo dos anos pré-universitários" (OLÍMPIO, 2007, p. 01).

A referida disciplina abrange o estudo de funções reais e o conceito de limite. Por essa razão, a compreensão do conceito de função é de fundamental importância na aprendizagem das noções e técnicas abordadas nos cursos de Cálculo. Tal importância é evidenciada, particularmente, quando dificuldades na aprendizagem dos conceitos do CDI surgem associadas a uma compreensão fraca ou limitada do conceito de função.

Em razão disso, discussões acerca das dificuldades na aprendizagem do Cálculo, relacionadas à incompreensão do conceito de função, têm sido foco de diversos estudos. Entre eles, cita-se a pesquisa realizada por Pedroso e Búrigo (2007), junto a estudantes com pelo menos duas reprovações na disciplina de CDI-I. Com os dados coletados a partir da resolução de exercícios que envolveram o cálculo de limite, as assíntotas, a determinação da reta tangente a uma curva, entre outros, as pesquisadoras observaram que compreensões fragmentadas ou dificuldades de coordenação dos componentes das funções (regra, domínio e contradomínio), configuram-se frequentemente em embaraços durante o desempenho de tarefas propostas na disciplina de Cálculo.

Essa problemática também surge no trabalho realizado por Olímpio (2007), que aborda o conceito de derivada. Segundo o autor, o CDI-I "materializa o primeiro contato formal do aluno com conceitos 'escorregadios', como os de limite ou de derivada, cujas dinâmicas demandam uma compreensão mais sólida, ampla e refinada sobre um outro conceito fundamental: o conceito de função" (p. 40). O autor destaca, ainda, que a compreensão do conceito de função tem sido investigada em duas linhas predominantes: uma abordando sua natureza como processo e objeto mental e outra abordando as múltiplas representações.

Neste artigo, adota-se essa última linha, ou seja, explora-se as múltiplas representações do objeto matemático função, com o intuito de possibilitar a construção desse conceito por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Nesse contexto, destaca-se como relevante o referencial teórico dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (2009, 2011, 2013a, 2013b) para análise de uma trajetória hipotética de aprendizagem.

Fundamentação Teórica

Quando se planeja o ensino de um tópico, toma-se algumas decisões, tais como: o que priorizar, quais atividades propor, como articulá-las, quais os recursos a utilizar, entre outras. Essas ações refletem a visão que se tem sobre a forma como os alunos aprendem aquele tópico, dadas as condições do momento. De certo modo, idealiza-se uma trajetória para a aprendizagem dos alunos. O desenvolvimento dessa ideia por pesquisadores deu origem ao conceito de trajetória hipotética de aprendizagem.

Segundo Simon (1995), uma trajetória hipotética de aprendizagem envolve três elementos: os objetivos de aprendizagem; as tarefas utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos e as hipóteses sobre o processo de aprendizagem relativo ao objeto matemático em estudo. Já Brunheira (2017), com base nos estudos de Clements e Sarama (2004), salienta que uma trajetória hipotética de aprendizagem compreende três aspectos: um objetivo de aprendizagem; uma base teórica que possibilite ao aluno superar suas dificuldades e, assim, progredir na aprendizagem de um certo conceito, e uma sequência de tarefas. A pesquisadora destaca, ainda, que

> A trajetória baseia-se num modelo de aprendizagem que é suficientemente explícito para descrever os processos envolvidos na persecução dos objetivos a atingir e concretiza-se através de uma sequência de tarefas que pretende desencadear a atividade matemática que, hipoteticamente, conduzirá à progressão das crianças (BRUNEIRA, 2017, p. 34).

De acordo com Orts, Llinares e Boigues (2016), há diferentes formas de conceber a noção de trajetória de aprendizagem, mas, uma característica comum é que ela fornece informações para a concepção de uma sequência de ensino destinada a apoiar mecanismos que permitam aos alunos avançar para níveis mais sofisticados de pensamento, ou seja, que possibilitam uma “progressão na aprendizagem” de um domínio particular.

Nesse trabalho utiliza-se a concepção de trajetória hipotética de aprendizagem com base nos estudos de Clements e Sarama (2004). Considera-se, então, as três componentes: o objetivo de aprendizagem, que nesta pesquisa é a construção do conceito de função; o referencial teórico, que, neste estudo, é a teoria dos Registros de Representação Semiótica; e uma sequência de tarefas, elaboradas levando em consideração as noções que compõem o conceito de função, quais sejam: dependência, regularidade, padrão, generalização, variável dependente e independente, variável discreta e contínua, domínio e imagem; além de suas múltiplas representações. Acredita-se que a identificação destes elementos e o estabelecimento de relações entre eles, por meio de distintos registros de representação, em uma trajetória de aprendizagem, é uma maneira de caracterizar uma “progressão na aprendizagem” do conceito em questão.

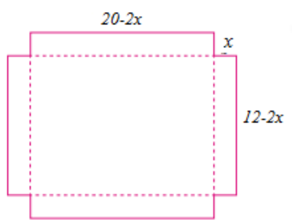
Os registros de representação, anteriormente citados, fazem parte do referencial teórico utilizado nesta investigação – Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval. Tais registros permitem o acesso aos objetos matemáticos, uma vez que esses “não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos” (DUVAL, 2013a, p. 14). Além disso, eles estão relacionados com as atividades de apreensão conceitual, de raciocínio e de compreensão de enunciados. Atividades estas inerentes ao funcionamento cognitivo do pensamento humano na aprendizagem matemática.

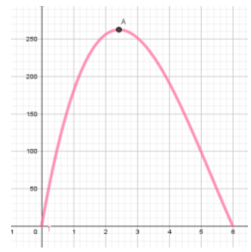
De acordo com Andrade e Santos (2019), no Brasil, a referida teoria é considerada recente. Os pesquisadores utilizam esse fato para justificar a baixa quantidade de trabalhos nos cursos de formação de professores. “Acredita-se que os autores brasileiros estejam criando uma identidade em relação a temática, promovendo mais estudos empíricos para constatação e validação dos pressupostos do autor francês Raymond Duval” (p. 240).

Segundo Duval (2013a), um sistema semiótico é um conjunto de signos que apresenta relações internas que permitem identificar os objetos representados, ou seja, é um sistema que desempenha a função de comunicação, já que é capaz de produzir e transmitir informações. Nesse contexto, ele introduz o conceito de registro de representação – sistema semiótico que cumpre, além da função de comunicação, as funções cognitivas de objetivação (entendimento para si) e tratamento – com o objetivo de explicitar “o quanto os sistemas de representação, além de veicular o conhecimento matemático, são ferramentas que dão suporte à criação e desenvolvimento de novas ideias e conceitos” (GRAVINA, 2015, p. 239). O autor faz referência a quatro tipos de registros utilizados na Matemática: língua natural; sistemas de escritas numérica, algébrica e simbólica; gráficos cartesianos e figuras geométricas.

No Quadro 1, apresenta-se alguns registros de representação semiótica mobilizados no ensino de função:

Quadro 1 – Registros de representação mobilizados no ensino de funções.

<table>
<tr><th>Registro na Língua Natural (RLN)</th><th>Registro Geométrico (RGe)</th><th>Registro Gráfico (RGr)</th></tr>
<tr>
<td>Um indivíduo dispõe de uma folha de papelão em formato retangular com lados medindo 20 cm e 12 cm. Sua intenção é cortar quatro quadrados de mesmo lado, um em cada canto da folha de papelão, de modo que possa usar o papelão para construir uma caixa (sem tampa). Ele deseja descobrir qual a medida do lado dos quadrados que devem ser cortados a fim de que o volume da caixa seja o maior possível.</td>
<td>

Registro Algébrico (RAl)
f: [0,6]—>IR$^+$
$f(x)=(20-2x)(12-2x)x$
$f(x)=4x^3-64x^2+240x$</td>
<td>
Registro Tabular (RTb)
<table>
<tr><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>180</td></tr>
<tr><td>2</td><td>256</td></tr>
<tr><td>3</td><td>252</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td></tr>
</table></td>
</tr>
</table>

Fonte: Autoras

Na visão de Duval (2013b), os diferentes sistemas semióticos permitem uma diversificação de representações de um mesmo objeto, aumentando as capacidades cognitivas dos sujeitos e, portanto, suas representações mentais. Isso porque, do ponto de vista cognitivo, nenhuma representação é completa em relação ao objeto que representa, ou seja, cada representação revela um determinado conceito, uma determinada propriedade, enfim, uma diferente característica. Além disso, a mobilização e coordenação de vários registros de representação tornam-se importantes para que os objetos matemáticos não venham a ser confundidos com suas representações e para que possam ser reconhecidos em cada uma delas.

Nessa direção, o autor destaca que, para compreender como ocorre a aquisição conceitual por meio da mobilização e coordenação dos registros de representação, é necessário entender duas atividades cognitivas próprias da atividade matemática: o tratamento e a conversão. O tratamento é a transformação de uma representação semiótica em outra representação semiótica, dentro do mesmo tipo de registro. Por exemplo, simplificar uma expressão algébrica. Sendo assim, os tratamentos não estão relacionados ao conteúdo do objeto e sim à forma.

Por outro lado, a conversão de uma representação é uma transformação que ocorre entre registros diferentes. A partir do Quadro 1, é possível exemplificar algumas conversões: passar da representação algébrica para a gráfica (RAl$\rightarrow$RGr) ou o contrário (RGr$\rightarrow$RAl); da tabular para a gráfica (RTb$\rightarrow$RGr), entre outras. Observa-se que, nessa atividade, conserva-se a referência, mas não o sentido, ou seja, as mesmas propriedades do objeto. Por esse motivo, a conversão permite compreender diferentes aspectos de um mesmo objeto, conduzindo à compreensão.

Duval (2009) salienta que o tratamento, normalmente, é a transformação que mais se prioriza no ensino. Enfatiza, ainda, que a atividade de conversão, principalmente em seus dois sentidos, é relevante para a aprendizagem em Matemática e, por isso, necessita ser levada em consideração nas atividades de ensino. São nelas que as mudanças nos registros de representação se mostram mais eficazes para a formação conceitual e transformação em saberes.

Ainda segundo o teórico, a conversão, que é necessária para a conceitualização, enfrenta o fenômeno de congruência ou de não congruência que contribuem para os sucessos e os insucessos dos alunos frente às questões que implicam uma mudança de registros de representação. Quando há congruência entre a representação de partida e a representação de chegada, a conversão se faz espontaneamente.

Dois registros semióticos são congruentes quando as seguintes condições são satisfeitas: a) Possibilidade de correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem; b) Cada unidade significante elementar do registro de representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro de representação de chegada; c) Existência de uma correspondência na mesma ordem de apreensão das unidades significantes em cada um dos registros envolvidos. A não-ocorrência dessas condições determina uma conversão não congruente. Nesse caso, não apenas o de tempo de tratamento aumenta, como também a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender.

Com base nesse referencial, foi elaborada e proposta uma sequência de atividades que abordam, entre outros, o conteúdo de função. Essa sequência de atividades é um dos aspectos que compõem uma trajetória hipotética de aprendizagem, conforme Brunheira (2017). Com os dados coletados, buscou-se verificar se a realização das atividades possibilitou uma “progressão na aprendizagem” dos conceitos envolvidos.

Metodologia

Os dados aqui apresentados são parte de uma pesquisa maior. A metodologia utilizada no desenvolvimento do estudo é de natureza qualitativa (BOGDAN e BIKLEN, 1994) e apoia-se na construção e desenvolvimento de uma trajetória hipotética de aprendizagem. A pesquisa exploratória, do tipo estudo de caso, teve a participação de alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Rio Grande do Sul e foi composta de duas fases principais: uma fase inicial de diagnóstico, em que foi realizada uma avaliação, que teve como objetivo identificar as dificuldades trazidas da Educação Básica pelos licenciandos; e uma fase posterior de intervenção pedagógica, na qual foi aplicada uma sequência didática composta por vinte atividades, as quais foram elaboradas a partir da análise do diagnóstico e abordaram vários conteúdos de matemática básica, entre eles, o conceito de função. Nelas, foram explorados os diversos registros de representação, o tratamento e a conversão, buscando a construção dos conceitos.

A implementação dessa sequência ocorreu nos meses de agosto a dezembro de 2017 e contou com a participação de dezesseis alunos. As atividades foram desenvolvidas em duplas ou trios, no período regular de aula da disciplina de Matemática Elementar. O *software* GeoGebra, por vezes, foi utilizado. Os grupos foram designados por G1, G2, ..., G6. Todos os alunos aceitaram participar da investigação e, para tanto, assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido. A pesquisa foi submetida ao Comitê de Ética e Pesquisa (CEP) da Universidade Franciscana, obtendo aprovação[1].

A análise dos dados empíricos, os quais foram coletados por meio das produções dos alunos, tanto em papel e lápis quanto em arquivos digitais, e das anotações do diário de campo, foi realizada com base no método sugerido por Duval (2011), o qual estabelece uma tripla análise das produções:

a) Uma **análise matemática**, em termos da validade do encaminhamento e do sucesso;
b) Uma **análise da compreensão**, ou seja, da aquisição pelos alunos em termos de autonomia e progressão;
c) Uma **análise das razões**, seja de sucesso ou aquisição, seja de fracassos ou bloqueios, isto é, os fatores que foram ou não considerados na sequência de atividades.

Desta forma, as produções dos alunos foram analisadas não apenas em função dos conhecimentos que eles deviam mobilizar para resolver a atividade, mas também, em função dos registros que a resolução sugeria mobilizar de forma coordenada. Para isso, foi necessário decompor a resolução das atividades em conversões e em tratamentos, segundo os registros mobilizados.

Assim, na análise matemática foram observados os tratamentos utilizados na resolução, a fim de identificar se a atividade foi resolvida corretamente ou não e quais os fatores que contribuíram para isso.

[1] Parecer consubstanciado nº 1.952.634.

Na análise da compreensão, analisou-se a mobilização de registros, pois, de acordo com Duval (2011), o processo cognitivo realizado para compreender a matemática mobiliza pelo menos dois registros de representação. Essa mobilização “requer uma atividade incessante de conversões, que ficam implícitas, mas que devem ser mais ou menos espontâneas” (DUVAL, 2011, p. 116). Segundo o autor, é na conversão que se opera a tomada de consciência pelos alunos. Sem este gesto (conversão), que deve ser quase automático, nenhuma atividade ou encaminhamento matemático é possível; ocorrem bloqueios que impedem o reconhecimento daquilo que é possível fazer.

Na análise das razões, procurou-se as razões dos fatores como: sucesso, fracassos, aquisição, bloqueios, que foram ou não considerados na resolução das atividades propostas. Para isso, analisou-se as resoluções e as tentativas de resoluções, as construções no software GeoGebra (quando este foi utilizado), as anotações do diário de campo, bem como a natureza dos registros mobilizados durante a resolução.

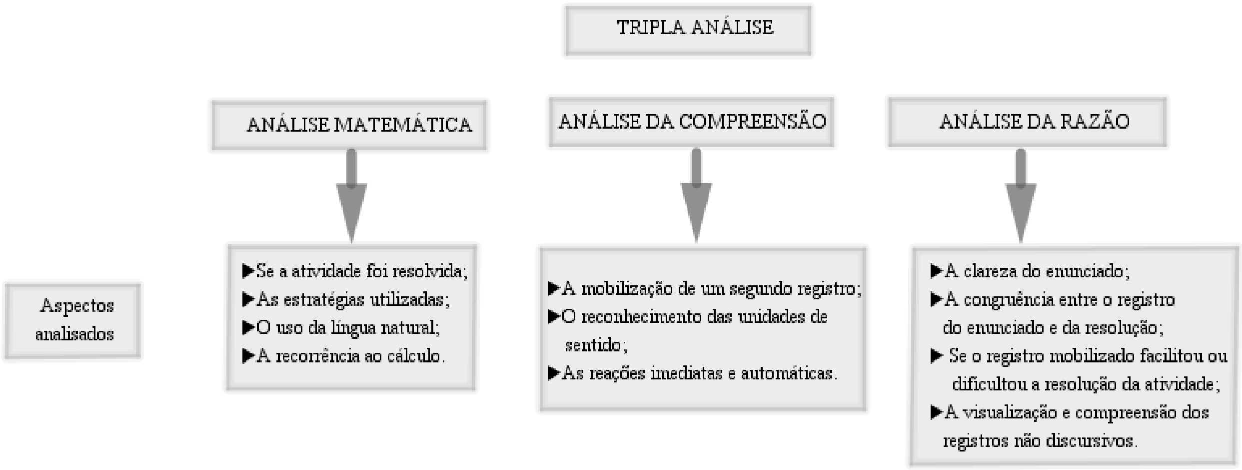
Segundo Duval (2011), esta tripla análise apresenta duas vantagens metodológicas:

> Ela permite analisar com precisão não apenas tudo o que um aluno faz, diz ou tenta, mas igualmente tudo o que ele não faz, ou o que ele não observa mesmo no que ele faz. Ela permite, em seguida, comparar as produções de um mesmo aluno em problemas que mobilizam conhecimentos matemáticos muito diferentes (DUVAL, 2011, p.149).

Desta forma, a execução deste método de análise exige uma visão de conjunto dos pares de registros que a atividade pode mobilizar, já que as transformações efetuadas na resolução de um problema podem recorrer a vários registros e que são essas transformações que permitem uma análise completa da produção dos alunos, identificando “todas as variáveis cognitivas que jogam sobre a compreensão ou incompreensão da matemática e sobre as capacidades de transferir os conhecimentos matemáticos para outras situações diferentes daquelas nas quais foram introduzidas” (DUVAL, 2011, p. 105).

Na Figura 1, apresenta-se os aspectos que foram observados a fim de implementar este método de análise indicado por Duval (2011).

Figura 1 – Aspectos analisados na tripla análise dos dados.



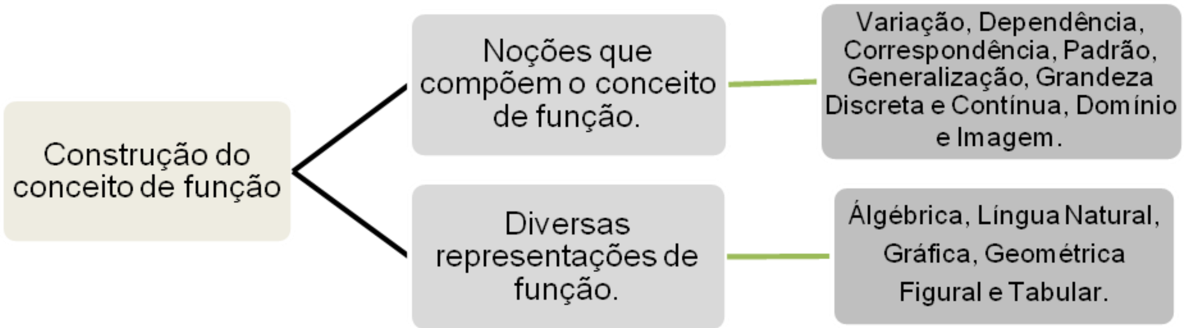
Fonte: Autoras

Neste artigo, constam os dados referentes a quatro atividades que exploram a construção do conceito de função. Nessa análise, buscou-se elementos para afirmar se a compreensão em relação ao conceito de função evoluiu ou não durante a realização das atividades. Entende-se que sejam verificações de superações de dificuldades que permitem constatar se houve uma evolução, ou seja, uma “progressão na aprendizagem” dos alunos.

Descrição da trajetória e análise dos resultados

A trajetória aqui apresentada visa à construção do conceito de função. A base necessária para isso envolve as noções de variação, dependência, correspondência, padrão, generalização, grandeza discreta e contínua, domínio e imagem; além do reconhecimento deste objeto matemático em suas múltiplas representações. Sendo assim, a trajetória hipotética de aprendizagem foi estruturada da seguinte forma:

Figura 2 – Trajetória Hipotética de Aprendizagem.



Fonte: Autoras

Desejou-se propiciar, além da compreensão do conceito de função, o desenvolvimento das capacidades de raciocínio, de análise, de visualização e de justificação. Para isso, a trajetória foi constituída num ensino exploratório, em que coube ao aluno uma parte importante do trabalho de descoberta e construção do conhecimento, e numa dinâmica na qual foram intercalados momentos de discussões entre a resolução das atividades propostas.

A seguir, apresenta-se as atividades, juntamente com suas análises.

Quadro 2 – Atividade 1.

Atividade 1 – No pedaço de cartolina que você recebeu, desenhe um quadrado $ABCD$ de $20cm$ de lado. Nele, desenhe uma região triangular IMN de modo que o vértice I coincida com o ponto médio do segmento AB, os vértices M e N estejam nos segmentos AD e CD, respectivamente, e tal que $AM = DN$. Denomine pôr x a medida do segmento AM.
a) No seu desenho, qual é o valor de x? Qual é o valor da medida da área do triângulo IMN?
b) Troque de desenho com um colega. No desenho do colega, qual é o valor de x? Esse valor é igual ao do seu desenho? E o valor da medida da área do triângulo IMN qual é? A medida da área do triângulo do colega é igual à do seu triângulo?
c) Neste contexto, podem ser observadas algumas variáveis. Identifique a variável dependente e a independente.
d) Verifique se existem triângulos IMN para $x = \sqrt{10}$, $x = 18{,}5$ e $x = 22cm$. Justifique sua resposta.
e) Existem triângulos IMN para $x = 0$, $x = 5$, $x = 10$ e $x = 20cm$? Em caso afirmativo, calcule a medida da área dos triângulos.
f) Como é a variação de x?
g) Valores maiores para x produzem triângulos de maior medida de área? Justifique sua resposta.
h) Valores diferentes para x produzem triângulos de mesma medida de área? Justifique.
i) Um único valor para x, pode determinar triângulos de diferentes medidas de área? Justifique.
j) A área do triângulo IMN é uma função de x? Justifique sua resposta.

Fonte: Autoras

A primeira atividade teve como objetivo construir o conceito de função explorando os aspectos intuitivos de variação e dependência, a distinção entre variável dependente e independente, a correspondência unívoca entre as variáveis, além do domínio da função. Seu processo de resolução envolve, entre outros, a interpretação do enunciado procedendo as devidas conversões.

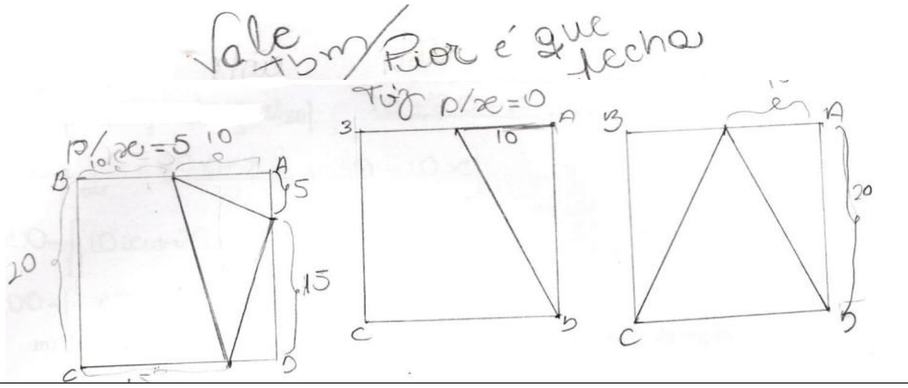
Durante a experimentação, observou-se que, ao comparar as diferentes construções do grupo, os alunos perceberam que tanto a forma como a medida da área do triângulo IMN dependem da posição do ponto M, ou seja, dependem da medida x do segmento AM. Além disso, eles identificaram a variável dependente e a independente, o que é de fundamental importância para a compreensão do conceito de função. No entanto, manifestaram dificuldades no cálculo da medida da área do triângulo que haviam desenhado.

De um modo geral, as discussões giravam em torno das medidas da base e da altura do triângulo IMN. Os alunos alegavam que não sabiam como encontrar tais medidas e que sem elas não era possível determinar a medida da área solicitada. Nenhum aluno conseguiu perceber, de imediato, que a referida medida poderia ser obtida subtraindo da medida da área do quadrado $ABCD$ a soma das medidas das áreas dos triângulos IAM e MDN e do trapézio $IBCN$. Assim, para garantir a continuidade da resolução foi realizada uma intervenção. Contudo, a dificuldade apresentada pelos alunos pode ser explicada pelo fenômeno da não congruência entre o enunciado e as estratégias de resolução. O fato de o enunciado fazer menção apenas ao quadrado $ABCD$ e ao triângulo IMN conduziu os alunos a não perceberem, no registro geométrico, a presença de outras unidades figurais tais como, triângulos IAM e MDN e o trapézio $IBCN$, pertinentes na resolução do problema.

A partir da análise dos dados produzidos pelos alunos, considerando as categorias propostas por Duval, foi possível perceber que, após intervenção, todos os grupos conseguiram resolver corretamente os quatro primeiros itens da atividade 1. No item (e), alguns grupos tiveram dúvidas em relação à existência de triângulos para $x=0$ e $x=20\ cm$ Sendo assim, foi sugerido que recorressem à representação geométrica (desenho do triângulo no pedaço de cartolina), para responder à questão. A mobilização de um novo registro foi necessária para compreensão do conceito de domínio de uma função. Com a mobilização do RGe, as dúvidas foram sanadas, como é possível observar no registro encontrado na Figura 3.

Figura 3 – Resolução do item (e) da atividade 1 apresentada por G2.

e) Existem triângulos IMN para $x=0$, $x=5$, $x=10$ e $x=20$? Em caso afirmativo, calcule a área dos triângulos.

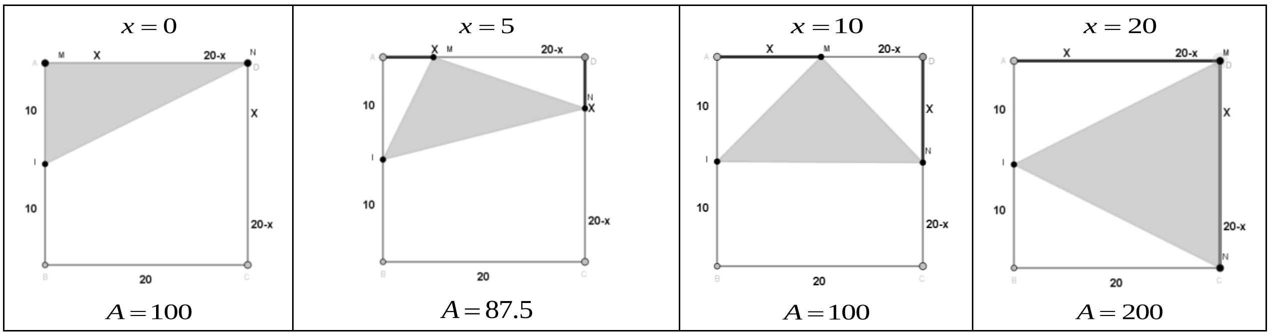


Fonte: Dados da pesquisa

Quanto às medidas das áreas solicitadas, constatou-se que os alunos não tinham mais dúvidas de como calculá-las. Cabe destacar que, no que se refere aos seis primeiros itens da atividade 1, as produções dos alunos exibem um elevado índice de respostas corretas. A visualização proporcionada pela mobilização do RGe foi fundamental para isso. Entretanto, constatou-se que alguns grupos não conseguiram estabelecer conexões entre o que já haviam respondido e o que estava sendo requerido, num segundo momento.

Com o trânsito entre os registros geométrico e numérico (Figura 4) proporcionado pela resolução dos primeiros itens da atividade os alunos tinham subsídios para resolver os demais, ou seja, para informar que $0 \leq x \leq 20$, que valores maiores para x nem sempre produzem triângulos de maior medida de área, que valores diferentes de x podem produzir triângulos de mesma medida de área; e que um único valor de x não pode produzir triângulos de medidas de área distintas.

Figura 4 – Solução do item (e) da atividade 1.



Fonte: Autoras

No entanto, alguns grupos não conseguiram transferir as informações de um item para o outro. Na Figura 5, ilustra-se a incoerência entre as respostas dadas por G3 aos itens (e) e (g), desta atividade:

Figura 5 – Resolução dos itens (e) e (g) da atividade 1 apresentada por G2.

e) Existem triângulos IMN para $x=0$, $x=5$, $x=10$ e $x=20$? Em caso afirmativo, calcule a área dos triângulos.

$x = 0$ cm
$A\Delta = \frac{10 \cdot 20}{2}$
$A\Delta = 100\ cm^2$

$x = 5$ cm
$A\Delta IAM = \frac{10 \cdot 5}{2}$
$A\Delta = 25\ cm^2$
$A\Delta MDN = \frac{15 \cdot 5}{2}$
$A\Delta = 37{,}5\ cm^2$

$A_{trap} = \frac{(15 + 10) \cdot 20}{2}$
$A_{trap} = 250\ cm^2$
$400 - 250 - 37{,}5 - 25$ cm
$A\Delta IMN = 87{,}5\ cm^2$

$x = 20$ cm
$A\Delta = \frac{20 \cdot 20}{2}$
$A\Delta = 200\ cm^2$

g) Valores maiores para x produzem triângulos de maior medida de área? Justifique sua resposta.

Sim, pois x vai variar a base e a altura de modo que quando > x, > a base e a altura, influenciando na área final.

Fonte: Dados da pesquisa

Da mesma forma, o grupo G6, mesmo tendo respondido corretamente o item (e), respondeu incorretamente os últimos quatro itens. Após resolver o item (e), o grupo G1 respondeu corretamente o item (g). No entanto, não percebeu que tais resultados também forneciam informações suficientes para responder o item (h), vindo a respondê-lo incorretamente. Os itens (i) e (j) também foram respondidos de forma incorreta por G1, como é possível verificar na Figura 6:

Figura 6 – Resolução dos itens (i) e (j) da atividade 1 apresentada por G1.

i) Um único valor para x, pode determinar triângulos de diferentes medidas de área? Justifique.

Sim, pois vai diferenciar as medidas

j) A área do triângulo IMN é uma função de x ? Justifique sua resposta.

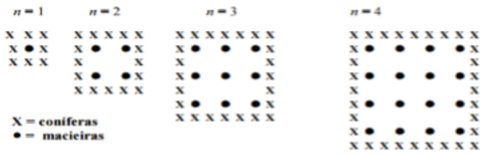
Sim, pois valores diferentes de x vão em diferentes de y

Fonte: Dados da pesquisa

Diante do exposto, infere-se que, para uma boa parte dos alunos, os tratamentos geométrico e numérico mobilizados não foram suficientes para uma efetiva compreensão da relação funcional existente entre a medida x do segmento AM e a medida da área do triângulo IMN. Deste modo, sentiu-se a necessidade de explorar novamente esta atividade, mas, com um tratamento diferente.

Quadro 3 – Atividade 2.

Atividade 2 – Um fazendeiro planta macieiras em uma região quadrada. Para protegê-las contra o vento, ele planta coníferas ao redor do pomar. O diagrama abaixo mostra essa situação, na qual se pode ver as macieiras e as coníferas, para um número n de filas de macieiras.



a) Observando a figura acima, complete a tabela abaixo.

Nº de filas de macieiras (n)	1	2	3	4	5	6
Quantidade de coníferas (C)						
Quantidade de macieiras (M)						

b) Determine as expressões algébricas que relacionam o número de coníferas C e o número de macieiras M com o número n de filas de macieiras. Essas relações representam uma função? Em caso afirmativo, represente-as graficamente.

c) Existe um valor de n para o qual o número de macieiras é igual ao número de coníferas? Em caso afirmativo, determine esse valor.

d) Suponha que o fazendeiro queira fazer um pomar muito maior. À medida que o fazendeiro aumenta o pomar, o que crescerá mais rápido: o número de macieiras ou o número de coníferas? Explique sua resposta.

Fonte: Adaptada do PISA – Programa da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico para Avaliação Internacional de Alunos

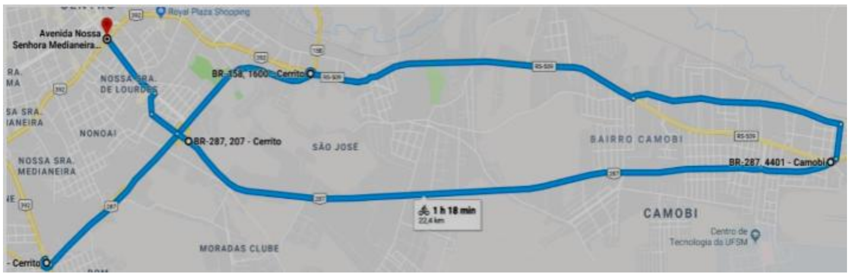
A atividade 2 visa a identificação de padrões, a partir de uma sequência de figuras, a resolução de equações e o reconhecimento de uma sequência como um tipo especial de função. Nela, procurou-se articular o registro figural, tabular, algébrico, gráfico e língua natural.

Da implementação e da análise dos protocolos referentes a essa atividade, constatou-se que os todos os grupos, após preencherem a tabela, encontraram facilmente as expressões algébricas solicitadas. Da mesma forma, afirmaram que tais expressões representam funções, pois “para cada n existe apenas uma quantidade de coníferas e macieiras”. Aqui, notou-se que os alunos compreenderam que numa relação funcional existe uma correspondência unívoca entre as variáveis envolvidas, o que não aconteceu na atividade 1; contudo, nenhum grupo teve sucesso ao representar graficamente tais funções. Acredita-se que isso aconteceu porque, no âmbito da Educação Básica, os exemplos mais comuns envolvem funções expressas algebricamente, enquanto que as outras representações são pouco exploradas; os gráficos, na maioria das vezes, são tratados como um conjunto de pontos ligados por segmentos de retas; os exercícios, em geral, omitem o domínio e contradomínio das funções, colocando foco sobre a regra; e as funções, geralmente, não são relacionadas com outros conteúdos da Matemática, como as sequências e as progressões.

Quanto a resolução da equação $n^2 = 8n$, os grupos G1 e G3, desconsideraram o domínio da função, apresentando $n = 0$ e $n = 8$ como soluções, ou seja, os alunos não levaram em consideração o contexto da situação proposta, existem macieiras e coníferas na plantação e, por isso, $n = 0$ não é uma solução aceitável. O último item foi respondido de forma correta por todos os grupos.

Quadro 4 – Atividade 3.

Atividade 3 – Um ciclista percorre o trajeto mostrado na figura abaixo:



a) Se quiséssemos determinar a localização desse ciclista, em relação ao tempo, essa localização seria uma função do tempo? Explique.

b) E o tempo, pode ser descrito como uma função da localização? Explique sua resposta.

Fonte: Autoras

A atividade 3 tem como objetivo o reconhecimento de uma função, na representação de um problema simples do dia a dia. Tarefas de reconhecimento, ou seja, de identificação dos objetos por suas múltiplas representações, são tão importantes para a aprendizagem quanto as tarefas de produção, sendo a rapidez na resolução sua principal característica (DUVAL, 2013a). Com essa atividade, pretende-se chamar a atenção para o fato de que uma relação funcional não está diretamente ligada a uma representação algébrica (lei de formação).

Durante a aplicação, percebeu-se que a atividade foi resolvida sem muitas discussões. Contudo, na análise das produções dos alunos, constatou-se que dois grupos deixaram a questão em branco. Nos protocolos dos grupos respondentes, para o item (a), encontrou-se as seguintes respostas:

- “Não é função, porque não dá para encontrar uma lei” (G1 e G2);
- “Não é função, pois o ciclista passa no mesmo lugar duas vezes” (G4);
- “A localização é uma função do tempo, pois em cada instante o ciclista está em um único lugar, ou seja, para cada x (tempo) existe um único y (localização)” (G5).

Para o item (b), as respostas encontradas foram:

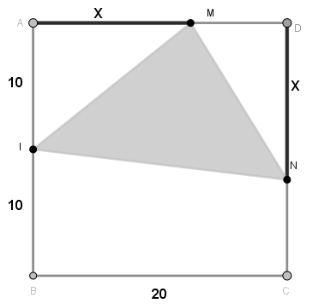
- “Não, porque não dá para determinar uma lei” (G1);
- “Não, pois o tempo depende da velocidade e não da localização” (G2);
- “Sim, pois o ciclista não pode estar ao mesmo tempo em dois lugares diferentes” (G4);
- “Não, é a localização que depende do tempo” (G5).

Pelo exposto, percebe-se que G5 foi o único grupo que apresentou uma explicação coerente, deixando indícios de que identificou as variáveis do problema e que reconheceu a relação funcional existente entre elas. Os demais demonstraram dificuldades no reconhecimento da função e confusão em relação ao significado das variáveis envolvidas. Além disso, ficou evidente que, alguns alunos, associam função a uma representação algébrica. Isso porque, os exemplos mais comuns, que aparecem em livros e são trabalhados em aulas, envolvem funções expressas algebricamente, enquanto as outras representações são pouco exploradas (PIRES, 2014).

As discussões proporcionadas por essa atividade foram bastante produtivas, uma vez que permitiram aos alunos uma nova maneira de conceber função. A partir delas, este conceito passou a ser olhado como uma transformação, como uma dependência entre grandeza, como o resultado de um movimento, e não apenas como uma expressão algébrica; ou seja, os alunos passaram a conceber função de uma forma dinâmica.

Quadro 5 – Atividade 4.

Atividade 4 – Na atividade 1, você desenhou um quadrado $ABCD$ de $20cm$ de lado. Nele, desenhou uma região triangular IMN onde o vértice I coincidia com o ponto médio do segmento AB, os vértices M e N estavam nos segmentos AD e CD, respectivamente, e onde $AM = DN$. Em seguida, denominou pôr x a medida do segmento IMN obtendo, assim, a seguinte figura:



a) Encontre a expressão algébrica que determina a área do triângulo IMN em função da medida x do segmento AM.

b) Considerando o contexto do problema, em que domínio faz sentido definir a função área?

c) Para qual valor de x a região triangular IMN tem a menor medida de área? Qual é a medida da área mínima?

d) Construa o gráfico da função área.

Fonte: Autoras

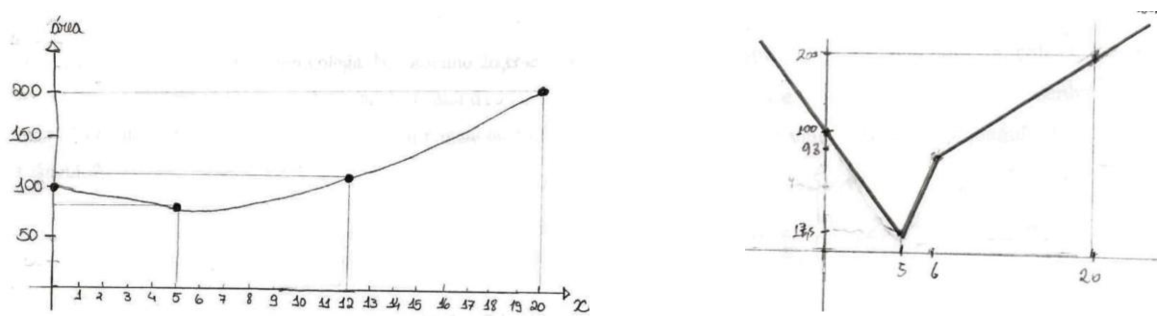
Na atividade 4 retoma-se a construção geométrica sugerida pela atividade 1, pois, naquele momento, constatou-se que os tratamentos geométrico e numérico não foram suficientes para uma total compreensão da relação existente entre as variáveis envolvidas. Nela, o principal registro de partida é o geométrico. Sua resolução consiste em encontrar a expressão algébrica que permite determinar a área do triângulo IMN em função da medida x do segmento AM e, a partir dela, especificar o ponto de mínimo da função. Tal ponto é uma unidade significante na conversão do registro algébrico para o gráfico, requerida no último item.

Da aplicação dessa atividade, foi possível perceber que os alunos identificaram imediatamente as unidades figurais elementares e as subfiguras, triângulos IAM e MDN e trapézio $IBCN$, que precisavam ser visualizadas para obtenção da lei da função; porém, ao analisar os protocolos de resolução, observou-se que os grupos G2 e G3 não chegaram na expressão algébrica correta, devido a erros no tratamento algébrico, conforme observado na análise matemática e na análise da compreensão. Contudo, o equívoco na simplificação da expressão não foi o que causou maior preocupação, mas sim o fato de que apenas um grupo teve êxito na construção do gráfico. Este resultado é justificado pela não congruência entre os registros algébrico e gráfico das funções. Na Figura 7, apresenta-se a construção de dois grupos.

Figura 7 – Resolução do item (d) da atividade 4 apresentada por G1.

d) Construa o gráfico da função.

G5 **G4**

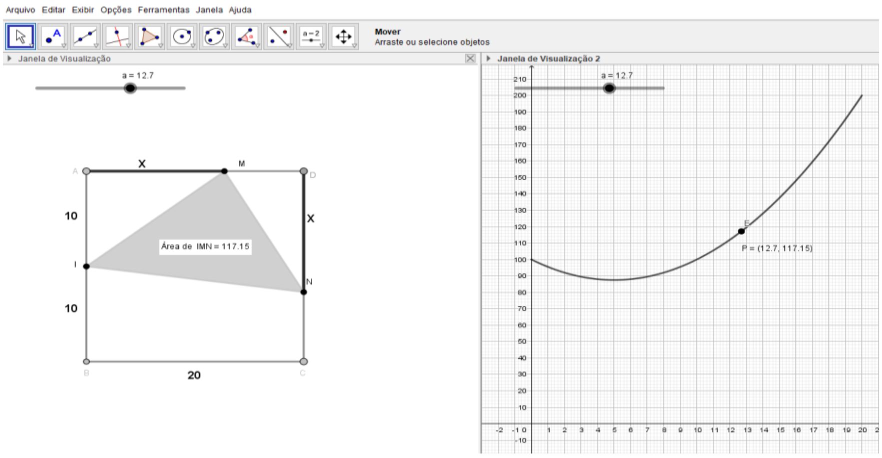


Fonte: Dados da pesquisa

Pela figura, percebe-se que o grupo G4, ao construir o gráfico localizou, no plano cartesiano, pontos significativos, mas acabou unindo-os por segmentos de retas, sem considerar a lei de formação da função. Os participantes do grupo G5, utilizam o que Duval (2011) denomina de procedimentos de pontuar e extensão do traçado. Contudo, a utilização desses procedimentos esteve acompanhada da análise da lei de formação da função, do domínio, do vértice e dos extremos, o que garantiu o sucesso na execução da tarefa.

Com a análise do gráfico, esperava-se que os alunos entendessem o comportamento da função, pois isso não havia acontecido mediante a mobilização dos registros geométrico e numérico, na atividade 1. No entanto, apenas um grupo conseguiu construir o gráfico de forma correta. Percebendo isso, já na aplicação da atividade, apresentou-se, durante a socialização dos resultados, a resolução da atividade por meio dos recursos do software GeoGebra, conforme consta na Figura 8.

Figura 8 – Construção da atividade 4 realizada no GeoGebra.



Fonte: Autoras

Tal construção possibilitou, aos alunos, a visualização geométrica e gráfica do conceito de função. O gráfico representado acima foi obtido através da ferramenta “Lugar Geométrico”. A animação do “controle deslizante”, por meio dos recursos do software, foi utilizada; o que possibilitou aos alunos uma melhor compreensão da situação proposta, bem como do conceito em questão. Melo e Fireman (2016), confirmam o caráter facilitador e otimizador da aprendizagem proporcionada pelas atividades no GeoGebra, que decorrem do dinamismo de suas ferramentas.

Considerações Finais

O presente estudo teve como objetivo analisar a construção do conceito de função, por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto, foi elaborada uma trajetória hipotética de aprendizagem, a partir de atividades que exploram as noções variação, dependência, correspondência, padrão, generalização, grandeza discreta e contínua, domínio e imagem, além das múltiplas representações de uma função.

A fim de verificar se houve a apropriação do conceito em questão, as produções dos alunos foram analisadas com base na tripla análise sugerida por Duval (2011): análise matemática, análise da compreensão e análise das razões.

Diante dessas análises, o estudo revelou que diversas dificuldades foram superadas ao longo da implementação e discussão das atividades. De um modo geral, a trajetória de aprendizagem possibilitou:

- Maior habilidade no reconhecimento de regularidades;
- Melhor compreensão dos conceitos de domínio e imagem e das implicações desses, no gráfico da função;
- Reconhecimento das progressões como funções de domínio discreto;
- Reconhecimento da correspondência unívoca existente em uma relação funcional;
- Uma nova concepção de função, uma vez que os alunos passaram a olhar para as funções como uma transformação, como uma relação de dependência entre

grandezas, como o resultado de um movimento, e não apenas como uma expressão algébrica, ou seja, os alunos passaram a conceber função de uma forma dinâmica.

Acredita-se que o enfrentamento das tarefas e as aprendizagens daí decorrentes foram favorecidos pelo trabalho em grupo, pelo diálogo com colegas e professora/pesquisadora, pela prática da justificação, pela transferência entre os registros de representação, pela socialização das respostas e pelas discussões realizadas após cada atividade.

Assim, entende-se que a superação de dificuldades, ocorrida no contexto dessa trajetória de aprendizagem, permite afirmar que houve um avanço na compreensão do conceito de função, ou seja, uma "progressão na aprendizagem" dos sujeitos da pesquisa.

Referências

ANDRADE, A. A.; SANTOS, C. A. B. Um Cenário das Pesquisas envolvendo a Teoria Dos Registros de Representação Semiótica em edições do SIPEM. **REnCiMa,** v. 10, n.1, p. 228-245, 2019**.**

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto, 1994.

BRUNHEIRA, L. Uma trajetória de aprendizagem para a classificação e definição de quadriláteros. In: Educação e Matemática, **Revista da Associação de Professores de Matemática,** Lisboa, Edição 145, p. 33-37, 2017. Disponível em: < http://www.apm.pt/files/_Uma_trajetoria_5a786c9608c12.pdf >. Acesso em 30 abr., 2018.

CLEMENTS, D. H.; SARAMA, J. **Learning trajectories in mathematics education. Mathematical thinking and learning** 6(2), p. 81-89, 2004.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.** Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

______, R. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. (2013a). In: MACHADO, S. D. A. **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2013.

______, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas. (2013b). In: **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v.2, nº 3, jul-dez 2013. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende.

GRAVINA, M. A. O Potencial Semiótico do Geogebra na Aprendizagem da Geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

MELO, E. V.; FIREMAN, E. C. Ensino e Aprendizagem de Funções Trigonométricas por meio do Software GeoGebra aliado à Modelagem Matemática. **REnCiMa**, v.7, n.5, p. 12-30, 2016.

OLIMPIO, A. A. Primeiro Ano num Curso de Matemática: a definição de função e a dualidade local/global em conceitos de Cálculo. **Revista BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 20, nº 28, p. 39 – 67, 2007. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/issue/view/735 >. Acesso em 28 abr., 2018.

ORTS, A.; LLINARES, S.; BOIGUES, F. Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. **AIEM:** Avances de Investigación en Educación Matemática. n. 10, p. 111-134, 2016.

PEDROSO, L. W.; BÚRIGO, E. Z. A construção do conceito de função por estudantes de Cálculo. In: **Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática**, 2007, Belo Horizonte/MG. Anais... Belo Horizonte, 2007. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html >. Acesso em 30 abr., 2018.

PIRES, R. F. **Função: Concepção de Professores e Estudantes dos Ensinos Médio e Superior,** 2014. 439 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2014.

RASMUSSEN, C., MARRONGELLE, K.; BORBA, M. C. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM Mathematics Education**, Berlim (Alemanha), v. 46, p. 507-515, 2014.

SIMON, M, A. Reconstructing mathematics pedagogy from a contrustivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, 26(2), p.114-145, 1995.