CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA 3D PARA A APRENDIZAGEM DE INTEGRAIS MÚLTIPLAS NO CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

GEOGEBRA 3D CONTRIBUITIONS FOR THE LEARNING OF MULTIPLE INTEGRALS IN THE CALCULUS OF VARIOUS VARIABLES

Frederico da Silva Reis

Universidade Federal de Ouro Preto, fredsilvareis@yahoo.com.br

Márcio Antônio Cometti

Universidade Federal de Ouro Preto, marciocometti@hotmail.com

Edson Crisostomo dos Santos

Universidade Estadual de Montes Claros, edsoncrisostomo@yahoo.es

Resumo

Este artigo apresenta uma pesquisa que investigou contribuições da utilização do *software* GeoGebra 3D para a aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. O artigo fundamenta-se, teoricamente, em pesquisas sobre o Ensino de Cálculo de Várias Variáveis, no contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, apoiado no uso das tecnologias disponíveis e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada com alunos da disciplina Cálculo III de uma universidade da região metropolitana de Belo Horizonte – MG. Como metodologia da pesquisa, elaboramos, implementamos e avaliamos sequências didáticas centradas na utilização do *software* GeoGebra 3D, relacionadas à construção de representações de superfícies e de sólidos para o ensino de Integrais Múltiplas. Os resultados apontaram que a visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D se mostrou um componente indispensável na construção dos principais conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas; apresentaram a possibilidade de aliar o seu uso à construção de representações semióticas em diferentes registros, principalmente representações gráficas usadas; destacaram o intenso uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto gráfico e, finalmente, explicitaram que as sequências didáticas propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão entre representações em diferentes registros.

Palavras-chave: GeoGebra 3D. Integrais Múltiplas. Educação Matemática no Ensino Superior.

Abstract

This article presents a research that investigated contributions of the use of GeoGebra 3D software for the learning of Multiple Integrals in the Calculus of Various Variables. The articleis based, theoretically, on research on the Teaching of Calculus of Various Variables, in the context of Mathematics Education in Higher Education, supported by the use of available Technologies and in the Theory of Registers of Semiotic Representation. The qualitative research was carried out with students of the discipline Calculus III of a university of the metropolitan region of Belo Horizonte – MG. As a research methodology, we developed, implemented and evaluated didactic sequences focused on the use of GeoGebra 3D software, related to the construction of representations of surfaces and solids for the teaching of Multiple Integrals. The results showed that the visualization provided by GeoGebra 3D was an indispensable component in the construction of the main concepts and properties of Multiple Integrals; presented the possibility of allying their use to the construction of semiotic representations in different registers, mainly graphic records used; emphasized the intense use of the treatment operations, both in the algebraic and graphic realms, and finally, they explained that the didactic sequences provided the opportunity to explore the conversion operation between representations in different records.

Keywords: GeoGebra 3D. Multiple Integrals. Mathematics Education in Higher Education.

Introdução

No contexto das aulas de Cálculo de Várias Variáveis, observa-se que muitos alunos apresentam enormes dificuldades em trabalhar com funções no âmbito tridimensional, principalmente, quando se faz necessário esboçar representações gráficas de superfícies e, a partir delas, obter e interpretar informações importantes que serão usadas nas resoluções de problemas. Henriques, Attie e Farias (2007, p.78) reforçam essa concepção quando afirmam que "em muitos casos, a representação gráfica no espaço tridimensional é difícil de fazer no ambiente *papel/lápis*, que só tem como base o plano de duas dimensões (o papel)".

Ainda de acordo com os autores, a representação tridimensional em um ambiente bidimensional, como o papel, depende exclusivamente da capacidade do indivíduo de realizar o desenho, mas não são todos que possuem essa capacidade. Assim, podemos considerar tal argumentação uma boa justificativa para utilizarmos recursos computacionais nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo de Várias Variáveis e, particularmente, de Integrais Múltiplas.

Contribuições das pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior

No contexto da Educação Matemática no Ensino Superior, é notadamente crescente o número de pesquisas tendo como *locus* de investigação o Cálculo de Várias Variáveis. Destacamos aqui, apenas algumas das pesquisas que utilizaram *softwares*.

Henriques (2006) buscou compreender as dificuldades apresentadas por alunos na aprendizagem do Cálculo de Várias Variáveis e entender como o *software* Maple pode ajudá-los a superar tais dificuldades. Sua abordagem buscou favorecer interações entre representações analíticas e gráficas das Integrais Múltiplas.

Miranda (2010) utilizou o *software* Winplot para desenvolver atividades relacionadas ao esboço de gráficos relacionados a funções de duas e três variáveis. O pesquisador apontou que o uso do recurso computacional contribuiu para a aprendizagem, mostrando-se importante e necessário para que os alunos compreendessem as formas das superfícies e curvas de níveis.

Alves (2011) também desenvolveu uma pesquisa relacionada aos processos de ensino e de aprendizagem do Cálculo de Várias Variáveis, visando descrever e identificar as categorias do raciocínio intuitivo ao longo das fases de ensino utilizando uma sequência de aprendizagem. Os *softwares* GeoGebra e Maple utilizados na pesquisa evidenciaram elementos significativos no que diz respeito à transição interna do Cálculo de Uma Variável para o Cálculo de Várias Variáveis.

Oliveira (2014) investigou a produção de ideias matemáticas relacionadas a funções de duas variáveis em um ambiente coletivo com seres humanos com mídia. No âmbito do Cálculo de Várias Variáveis, o pesquisador centrou suas atividades principalmente em gráficos e domínios de funções de duas variáveis, curvas de nível e derivadas parciais, com a utilização do *software* Maxima, destacando que as explorações dos conceitos, transitando entre as mídias informáticas, oralidade e escrita contribuíram para a produção de ideias matemáticas acerca dos temas estudados.

A partir da revisão bibliográfica realizada, constatamos que as pesquisas revelaram a potencialidade da utilização de recursos tecnológicos, contribuindo significativamente para os processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo de Várias Variáveis, a partir da visualização de representações de superfícies e sólidos.

Sobre a pesquisa

Este artigo consiste em um recorte de uma pesquisa mais ampla (COMETTI, 2018), realizada ao longo de um semestre letivo do ano de 2017, com alunos de Engenharia Elétrica, matriculados na disciplina Cálculo III, em uma universidade da região metropolitana de Belo Horizonte – MG. O problema de pesquisa consistiu em identificar e analisar as possíveis contribuições de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D para os processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis. Os dados foram coletados a partir da elaboração, implementação e avaliação de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D,desenvolvidas por meio de três atividades realizadas em laboratório de informática, relacionadas à construção/exploração de Quádricas, Integrais Duplas e Integrais Triplas.

Como a pesquisa foi fundamentada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, pudemos analisar as atividades à luz dos registros mobilizados a partir da utilização do GeoGebra 3D, relacionados a diversos aspectos das Integrais Múltiplas.

Síntese da Teoria dos Registros de Representação Semiótica

No âmbito da Educação Matemática, Duval (2003) procurou descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a compreensão da Matemática, apresentada dentro de situações de ensino. Para o autor, existe uma enorme dificuldade de compreensão dos objetos matemáticos e também uma confusão, principalmente quando se necessita representá-los. Os objetos matemáticos não são palpáveis, ou seja, diretamente observáveis, e uma maneira de nos aproximarmos deles é por meio de suas representações.

Em Matemática, existe uma enorme variedade de representações semióticas para serem utilizadas, tais como: língua materna, gráficos, linguagem algébrica, figuras geométricas, entre outras. Essas representações podem, de certa forma, facilitar o acesso à compreensão dos conteúdos matemáticos.

Para essa diversidade de representações existente em Matemática, Duval (2011) introduz a ideia de registros de representação semiótica, ressaltando que existem dois tipos de registros: com representação discursiva e não discursiva.

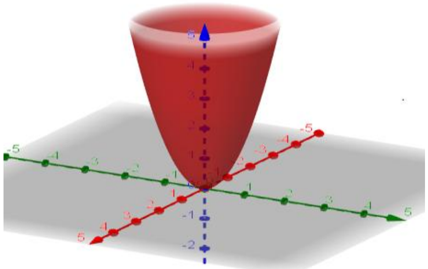
Para que essa perspectiva seja válida, é importante considerar o que Duval (2012) aponta como primordial, ou como um ponto estratégico, que consiste em não confundir objetos matemáticos com as representações que se faz deles. Para Duval (2012, p.268), "toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem". O que devemos levar em conta é que, ao utilizarmos as representações semióticas para "evocar" os objetos matemáticos, passamos a lidar com esses objetos e não com as suas representações ou com os signos.

Para Duval (2003), um mesmo objeto matemático pode ser representado de várias formas diferentes sem perder a essência. Para ele, essas diversas formas de representação são absolutamente necessárias, possibilitando a escolha da mais adequada para o que se pretende trabalhar. Flores (2006) acrescenta que a possibilidade de variar a representação de um mesmo objeto pode ajudar a elaboração mental do significado desse objeto matemático. Duval (2012) considera que para um sistema semiótico ser considerado um sistema de registro de representação semiótica ele deve permitir três atividades cognitivas ligadas a *semiosis*: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A formação de uma representação identificável ou uma operação cognitiva identificável pode ser compreendida como um enunciado compreensível em uma língua materna. Com relação ao tratamento, podemos considerá-lo como uma atividade cognitiva que busca a transformação de uma representação semiótica em outra, porém dentro do mesmo registro de representação. "O tratamento é uma transformação interna a um registro" (DUVAL, 2012, p.272).

Observando o exemplo apresentado no Quadro 1, podemos verificar que sua resolução se apresenta no registro algébrico, ou seja, para resolver o que se pede, basta igualar as duas equações e efetuar as operações matemáticas pertinentes. Nesse exemplo, partimos do registro algébrico, dado na questão, e usamos o mesmo registro para a resolução.

Quadro 1 – Exemplos de operações de tratamento e conversão

Operação de Tratamento	Operação de Conversão
Determine a interseção entre o plano $z = 8$ e o parabolóide $z = 2x^2 + 2y^2$ $2x^2 + 2y^2 = 8$ $2(x^2 + y^2) = 8$ $x^2 + y^2 = 4$ A interseção entre o plano e o paraboloide dados é, portanto, definida por: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 8 \end{cases}$	Esboçar o gráfico da função representada algebricamente por: $z = 2x^2 + 2y^2$ (Registro Algébrico)  (Registro Gráfico)

Fonte: Cometti (2018).

A conversão se refere às transformações que acontecem quando existe mudança de sistema semiótico de representação, levando em consideração o mesmo objeto matemático (Quadro 1). Segundo Duval (2012, p.272) a conversão de uma representação “é a transformação desta função em uma interpretação em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial”. A atividade cognitiva da conversão acontece independentemente e de forma diferente da atividade de tratamento. Devemos ficar atentos a essa diferença nos processos de ensino e aprendizagem de distintos objetos matemáticos, pois essas atividades acontecem, frequentemente, nas aulas.

A operação de conversão exige certos procedimentos metodológicos que estabelecem relações entre os elementos das unidades significantes em cada registro. Dessa forma, o grande dilema que se apresenta diante da operação de conversão é o que permite e o que permitirá reconhecer a mudança a se realizar (DUVAL, 2012). A transição entre representações de um dado objeto matemático em pelo menos dois registros distintos é o primeiro passo do pensamento matemático, constituindo-se em um critério para a compreensão em Matemática, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, aqui brevemente sintetizada.

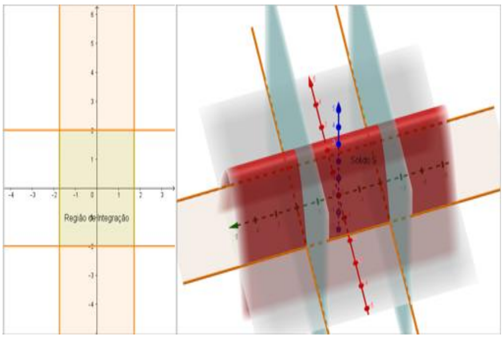
Apresentando atividades da pesquisa

Dentre as atividades aplicadas ao longo da pesquisa, destacamos duas que apresentam pontos relevantes e que merecem ser destacados e discutidos.

A primeira atividade intitulada “Construindo Integrais Duplas para Cálculo de Volumes”, está relacionada à construção de representações de sólidos em IR^3 e à Integral Dupla para o cálculo da medida de seu volume. Nessa atividade, temos um sólido S compreendido por uma superfície cilíndrica $z = -x^2 + 3$ e pelos planos xy, $y = 2$ e $y = 2$. Primeiramente, foi proposta a plotagem no GeoGebra 3D das representações de todas as superfícies e, posteriormente, que se aplicasse a ferramenta “Interseção de Duas Superfícies”, que apresentaria na caixa de visualização 2D, a região retangular de integração no plano xy. De posse da representação do sólido S já plotada no *software* e da sequência didática, foi solicitada uma Integral Dupla que representasse a medida do volume do sólido.

Apresentamos, no Quadro 2, a representação gráfica no GeoGebra 3D e a Integral Dupla esperada.

Quadro 2 – Representação da região de integração e a Integral Dupla

Registro Gráfico		Registro Algébrico
	⇨	$V = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \int_{-2}^{2} (-x^2 + 3)\, dy\, dx$

Fonte: Cometti (2018).

A ideia principal dessa atividade era que a visualização da representação do sólido possibilitasse que os alunos identificassem a função de integração a ser utilizada no cálculo da Integral Dupla que dá a medida do volume de S. Também queríamos que, a partir das interseções do plano xy com as superfícies que compunham o sólido, eles chegassem à região de integração e, consequentemente, determinassem os limites das integrais.

O objetivo foi transitar de uma representação no registro gráfico para outra no registro algébrico, de forma a obter a representação analítica da região de integração a ser considerada ao calcular a Integral Dupla que fornece como resultado a medida do volume do sólido S, explorando a operação de conversão.

Apresentamos, no Quadro 3, algumas repostas dadas pelos alunos que, a seguir, serão devidamente analisadas.

Quadro 3 – Integrais Duplas obtidas por meio da sequência didática

Aluno 1	Aluno 2
$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-2}^{+2} -x^2+3 \, dy\,dx$	$\int_{-1,73}^{1,73}\int_{0}^{3} -x^2+3 \quad dy\,dx$
Aluno 3	**Aluno 4**
$\int_{2}^{2}\int_{-2}^{2} -x^2+3 \, dy\,dx \Rightarrow$	$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{0}^{-x^2+3} 1 \quad dy\,dx$

Fonte: Cometti (2018).

O aluno 1 apresenta uma solução que consideramos correta. A Integral Dupla contempla corretamente a função de integração e os limites das integrais. As demais repostas apresentam os limites das integrais de forma equivocada, evidenciando uma desconexão na passagem entre as representações no registro gráfico e a representação no registro algébrico, ao expressar a Integral Dupla.

Analisando a região plotada, temos: $R: \{(x,y)/-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, -2 \leq y \leq 2\}$.

Para se certificar que os limites estavam corretos, os alunos podiam igualar as equações das superfícies com a equação do plano xy e resolver a equação resultante (operação de tratamento no registro algébrico). Aparentemente, os limites da região de integração não ficaram claros para os alunos 2 e 3.

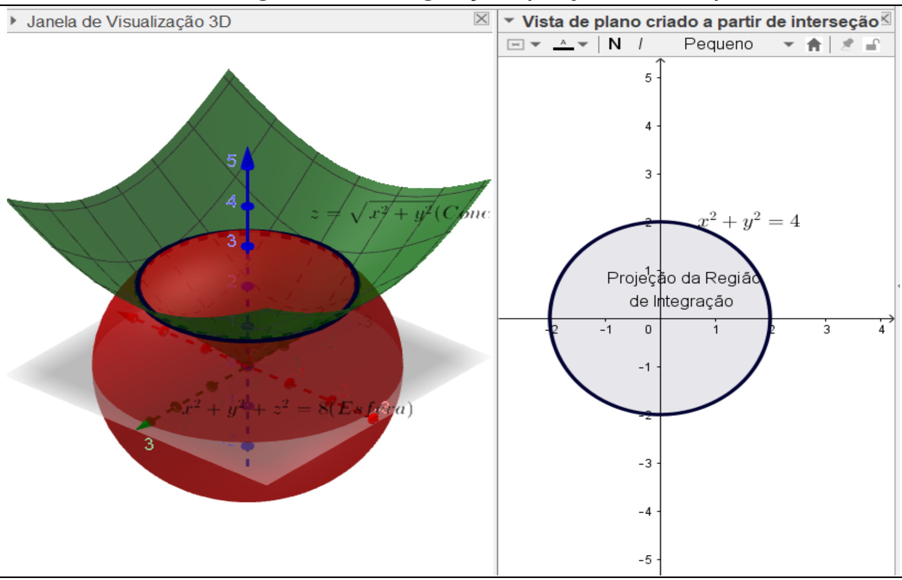
Vale também mencionar que o aluno 4 usou como limite superior a função cuja representação gráfica é a superfície cilíndrica e não os limites de integração no plano xy. Outra observação é com relação à função de integração, considerada incorretamente por eles como sendo a função constante $z(x,y) = 1$.

A segunda atividade destacada, intitulada "Construindo Integrais Triplas sobre regiões no espaço $\mathbb{R}^3$", explora a construção da representação de um sólido no espaço tridimensional com o auxílio do GeoGebra 3D e, posteriormente, a construção passo a passo de uma Integral Tripla para o cálculo da medida do seu volume.

Para expressar as Integrais Triplas, utilizamos procedimentos similares aos usados para as Integrais Duplas, com um elemento a mais, que consistiu em identificar os limites da integral que dependem da variável z. Inicialmente, foram dadas as representações algébricas das seguintes superfícies: $z = \sqrt{x^2+y^2}$; $z^2 + x^2 + y^2 = 8$. As superfícies que compõem o sólido da atividade são um cone e uma esfera. A equação $z = \sqrt{x^2+y^2}$ representa a parte do cone acima do plano xy. A outra superfície dada por $z^2 + x^2 + y^2 = 8$ representa uma esfera, com centro na origem $(0,0,0)$ e raio igual a $2\sqrt{2}$. No Quadro 4, representamos esse sólido, plotado no GeoGebra 3D e a Integral Tripla esperada.

Quadro 4 – Representação da região de integração e a Integral Tripla

Sólido S e região de integração projetada no plano xy



Integral Tripla para o volume do sólido S

$$V = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2+8}} dz\, dy\, dx$$

Fonte: Cometti (2018).

Observando o sólido construído por meio do GeoGebra 3D, foi possível verificar que a esfera limita superiormente o sólido. Como a primeira integral depende de z, devemos isolar essa variável na equação da esfera. Assim, obtemos duas equações $z = \pm\sqrt{8 - x^2 - y^2}$. Considerando-se o sinal de positivo, temos representada a semiesfera superior que é a parte da esfera que nos interessa, ou seja, a parte que se encontra acima do plano xy. Considerando-se o sinal de negativo na equação, temos representada a semiesfera inferior que é a parte da esfera que não nos interessa, ou seja, a parte que se encontra abaixo do plano xy. Para o limite inferior, podemos observar que a superfície que limita inferiormente o sólido é o cone, o qual já apresenta a equação no formato ideal para a construção da integral, que é $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Então, temos que: $\sqrt{8 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Para os demais limites das duas integrais restantes, que dependem de y e de x, respectivamente, devemos ficar atentos, pois a região de integração não está sobre o plano xy. Devemos usar as ferramentas do GeoGebra 3D para encontrar essa região de integração e obter a sua projeção no plano xy (mostrada no Quadro 4). Usando esses recursos, chegamos a uma região circular de centro na origem e raio igual a 2. Dessa forma, temos$-\sqrt{4 - x^2} \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}$ e $-2 \leq x \leq 2$.

A seguir, o Quadro 5 apresenta algumas repostas dadas pelos alunos.

Quadro 5 – Integrais Triplas obtidas por meio da sequência didática

Aluno 2	Aluno 7
$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx$	$\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{z=\sqrt{x^2-y^2-8}} 1\, dz\, dy\, dx$
Aluno 9	**Aluno 17**
$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{8-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} 1\, dz\, dy\, dx$	$\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} 1\, dz\, dy\, dx$

Fonte: Cometti (2018).

As repostas das atividades propostas na sequência didática apresentada apontaram muitos erros cometidos pelos alunos ao transitarem das representações no registro gráfico para as representações no registro algébrico, no momento de expressar a Integral Tripla para o cálculo da medida do volume do sólido S. Grande parte desses erros foi cometida, principalmente, ao descrever analiticamente a região de integração.

A resposta apresentada pelo aluno 2 mostra a Integral Tripla indicada corretamente, evidenciando que o aluno conseguiu mobilizar os conhecimentos matemáticos necessários para ir da representação gráfica para as representações no registro algébrico.

As demais respostas explicitaram a Integral Tripla de maneira errada. Na resposta do aluno 7, percebe-se que ele consegue determinar graficamente e algebricamente a interseção das superfícies e, consequentemente, a região de integração no plano xy, entretanto, comete equívocos ao determinar os limites da integração. Na resposta do aluno 9, nota-se que ele não consegue identificar os limites da primeira integral, invertendo-os. Para ele, o cone limita o sólido superiormente e a esfera inferiormente, mesmo podendo visualizar o sólido de vários ângulos diferentes no GeoGebra 3D. Na resposta do aluno 17, destaca-se que ele apresenta uma região de integração no plano xy que não é a correta. O aluno fez a interseção da esfera com o plano xy e não a interseção entre o cone e a esfera e, posteriormente, a sua projeção nesse plano, expressando a integral como se essa região fosse retangular.

Portanto, observarmos que, nas três últimas repostas apresentadas no Quadro 5, a manipulação e a transição entre os registros se mostraram falhas em algum momento.

Ressaltamos ainda que todas as atividades de pesquisa estão descritas e analisadas em Cometti (2018).

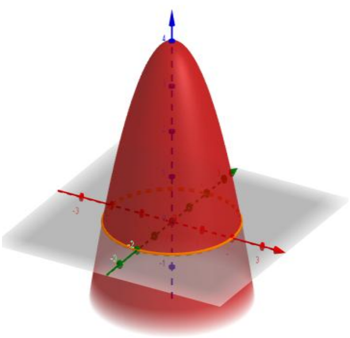
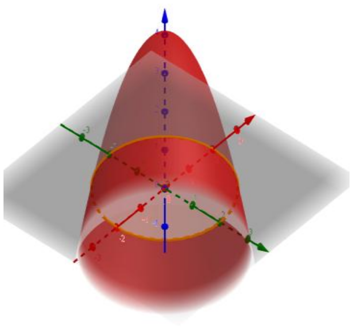
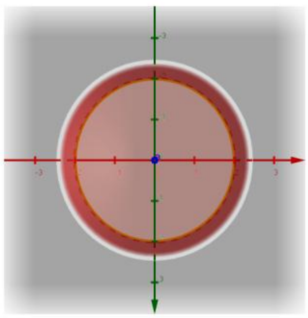
Discussão de resultados

Destacamos que as atividades desenvolvidas em nossa pesquisa apresentaram tanto explorações relacionadas às regiões de integração (representações gráfica e analítica) como às expressões relativas às integrais (representação algébrica), evidenciando, constantemente, a operação de tratamento e a operação de conversão.

Nas atividades voltadas para as Integrais Duplas e Triplas, a operação de tratamento se mostrou presente, principalmente na determinação das regiões de integração. As atividades que elaboramos possibilitaram a determinação dessas regiões por parte dos alunos com o auxílio do GeoGebra 3D. Logo, a utilização das ferramentas disponíveis no *software* possibilitou a transformação de representações no interior de um mesmo registro, bem como a obtenção de informações importantes para a construção das integrais.

Diante dessas possibilidades, Duval (2011, p.137) aponta para um “modo fenomenológico de produção radicalmente novo, fundamentado na aceleração dos tratamentos”. Uma síntese da operação de tratamento no registro gráfico para construção de Integrais Múltiplas pode ser apreciada no Quadro 6, a seguir.

Quadro 6 – Operações de tratamento no registro gráfico

Representação de Sólido gerada para a construção de uma Integral Dupla		
		

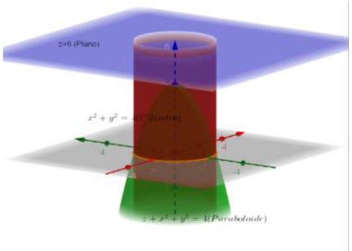
Fonte: Cometti (2018).

Observamos também que é necessário transitar, quase que frequentemente, entre os registros gráficos e algébricos, ou seja, é necessário explorar a conversão de representações nesses registros para que possamos mobilizar conhecimentos necessários para construirmos as integrais. A operação de conversão entre as representações nesses registros movimenta um passo muito importante na construção das Integrais Múltiplas, possibilitando a organização das informações algébricas a partir de representações gráficas. Isso permite encontrar os limites da região de integração e, assim, expressar a Integral Dupla ou Tripla.

Duval (2009) aponta que o uso de vários sistemas semióticos de representação é indispensável para a realização de atividades cognitivas necessárias na construção conceitual de um objeto matemático. A tarefa de realização da conversão entre representações nesses registros nem sempre é fácil, principalmente do registro gráfico para o algébrico (escrito analiticamente), e vice-versa, o que coaduna com Duval (2009, p.63), ao afirmar que "a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos".

A mudança de representações permite estabelecer significados variados do que é representado graficamente, como pode ser apreciado na síntese feita no Quadro 7, a seguir.

Quadro 7 – Representações usadas para a construção de uma Integral Tripla

Expressões Algébricas (dadas inicialmente)	$x^2+y^2=4$ $z+x^2+y^2=4$ $z=6$
Representações nos Registros	Representação no Registro Gráfico
	
	Representação no Registro Algébrico (escrito analiticamente)
	$R:\left\{(x,y,z)\mid -2\le x\le 2, -\sqrt{4-x^2}\le y\le \sqrt{4-x^2}, 4-x^2-y^2\le z\le 6\right\}$
	Integral Tripla (Volume do Sólido)
	$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{4-x^2-y^2}^{6} dz\ dy\ dx$

Fonte: Cometti (2018).

A visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D

Em nossa pesquisa, a visualização proporcionada pelo GeoGebra 3D se mostrou um componente indispensável para os processos de construção dos principais conceitos e propriedades de Integrais Múltiplas. Ficou evidente que as propriedades que o GeoGebra 3D possui, como a facilidade de manuseio e as suas inúmeras ferramentas, ajudaram muito para que pudéssemos observar e explorar visualmente alguns conceitos.

Possibilitaram também que aspectos contidos na construção de gráficos no plano e no espaço pudessem ser melhor compreendidos. As chamadas regiões de integração essenciais na construção de Integrais Múltiplas ganharam dinamicidade, o que acarretou na possibilidade de explorar características visuais inacessíveis em desenhos feitos por meio de papel e lápis. Diante desse fato, acenamos para a perspectiva de explorar regiões de integração muito mais complexas do que as que abordamos na pesquisa.

Observamos durante a aplicação das sequências didáticas que aspectos ligados à visualização favoreceram a aprendizagem de Integrais Múltiplas, pois viabilizaram o processo de criação, interpretação e reflexão sobre os gráficos criados no GeoGebra 3D, permitindo descrever e analisar informações e ideias antes desconhecidas. É importante frisar que tal concepção não garante uma aprendizagem em sua totalidade, mas acreditamos que potencializa os processos, tanto de ensino como de aprendizagem.

Ficou evidente também que existem indivíduos que apresentam uma facilidade de entender e interpretar aspectos visuais gráficos e que outros, nem tanto. Dessa forma, a utilização da visualização não pode ser entendida como um processo comum e similar para todos os indivíduos nos processos de ensino e aprendizagem. Cada um possui suas particularidades e experiências próprias diante dos conteúdos de Matemática e isso não foi diferente em relação aos conteúdos abordados nessa pesquisa.

Outro aspecto importante foi que as atividades ligadas à exploração de características visuais são melhor aproveitadas e adquirem maiores potencialidades quando guiadas pelo professor ou por uma sequência didática. Em nosso caso, usamos sequências didáticas para construir e interpretar regiões gráficas usadas em Integrais Múltiplas. Dessa forma, foi possível guiar os estudantes durante as atividades, levando-os a explorar recursos do *software*, destacando as especificidades visuais dos gráficos criados.

O GeoGebra 3D e os Registros de Representação Semiótica

A partir de uma análise dos dados obtidos, concluímos que existe a possibilidade de se aliar o uso do *software* GeoGebra 3D à construção de representações semióticas, principalmente no registro gráfico, usados na construção das Integrais Múltiplas. Novamente, o GeoGebra 3D se mostrou eficiente na criação desses gráficos, exibindo características importantes e bastante usuais, que viabilizaram o processo de construção dessas representações.

Salientamos que as representações obtidas com o auxílio de softwares não se constituem como uma nova representação (DUVAL, 2011). Nessa perspectiva, concordamos com o autor no que tange à construção das regiões de integração para as Integrais Múltiplas, exigidas em nossas sequências didáticas. Muitas representações gráficas usadas para desenvolver essas Integrais podem ser feitas à mão no papel, sem perder especificidades e informações importantes; mas, entendemos que o GeoGebra 3D, exibindo as mesmas representações feitas no papel para uma compreensão visual, permitiu exibi-las com maior facilidade e com maior clareza de detalhes.

O recurso computacional utilizado possibilitou sair de uma representação estática (papel e lápis) para um tipo de representação dinâmica o que, em nosso caso, permitiu explorar as representações de outras maneiras, apresentando bons resultados em termos de aprendizagem.

Outro aspecto evidenciado da teoria utilizada, referente à construção de representações em diferentes registros, está relacionado à capacidade do GeoGebra 3D de proporcionar uma “desconstrução dimensional”, muitas vezes necessária para o entendimento de Integrais Múltiplas. Essa desconstrução dimensional leva a uma mobilização de informações contidas nas regiões de integração, importantes para a construção das integrais. Verificamos que as ferramentas do GeoGebra 3D possibilitaram plotar representações, tanto nas janelas 2D como 3D e, o mais interessante, poder transitar entre essas janelas. Acreditamos que tal fato proporciona explorar aspectos cognitivos importantes para o processo de aprendizagem.

Entretanto, deixamos claro que produzir as representações com o auxílio de um *software* foi uma tentativa de mudança de prática de ensino, com o intuito de contribuir com a aprendizagem, mas o “bom e velho papel e lápis” ainda é uma possibilidade didática relevante.

A questão da potencialização da operação de tratamento

As operações de tratamento caracterizaram uma categoria de análise muito relevante para a pesquisa, pois emergiram nitidamente por meio dos dados analisados. Por isso, apesar do tratamento integrar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, acreditamos ser importante dar um destaque especial à análise feita sob a ótica desse conceito.

Em nossas sequências didáticas, destacaram-se o intenso uso das operações de tratamento, tanto no âmbito algébrico quanto no âmbito gráfico. Observamos que as sequências didáticas e também o próprio conteúdo de Integrais Múltiplas favoreceram a mobilização de representações dentro de um mesmo tipo de registro, além do *software* que utilizamos, que permitiu o trabalho com esse tipo de operação. Evidenciamos a capacidade do GeoGebra 3D em produzir inúmeras representações gráficas e uma potência de tratamentos ilimitada.

Quanto ao uso de *softwares* e às operações de tratamento, compartilhamos os apontamentos de Duval (2011) ao argumentar que esses possuem a capacidade de acelerar estas operações. Acreditamos que a possibilidade de dinamizar as atividades de tratamento, principalmente para os registros gráficos, acarretou ganhos importantes na aprendizagem e também, possivelmente, para a prática de ensino.

Entendemos que tal operação é uma das etapas essenciais na construção das Integrais Múltiplas e que, quando entendidas pelos estudantes, possibilita mobilizar cognitivamente informações/conhecimentos primordiais para a aprendizagem. Dessa forma, seria interessante que os professores pensem em práticas de ensino que valorizem essa atividade, destacando as potencialidades dos *softwares* frente às operações de tratamento.

A necessidade da operação de conversão para o ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas

Nos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, mais especificamente na perspectiva da necessidade de mudanças de registros de representações, concluímos que as mudanças de registros são imprescindíveis na tarefa de montagem das Integrais Múltiplas, desde os limites de integração até os integrandos. Notamos que existe uma grande dificuldade dos estudantes em transitar por alguns registros (gráfico para algébrico ou algébrico para gráfico) na construção de Integrais Múltiplas.

Observamos que a atividade cognitiva de conversão, ligada às representações semióticas, pode ser melhor explorada devido ao formato das atividades que aplicamos. As sequências didáticas, com seu passo a passo, propiciaram a oportunidade de explorar a operação de conversão, atentando para os detalhes e informações contidas em cada registro usado. Isso possibilitou percorrer um caminho entre os registros (conversão) de modo que os estudantes tivessem a possibilidade de compreender os aspectos cognitivos gerados em cada tipo de representação.

Acreditamos que, nos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, a atividade de conversão muitas vezes não ocorre como algo habitual e, assim, muitos estudantes se encontram limitados a representar apenas recorrendo a um registro e, quando o fazem, muitos não se atentam para a mobilização de conhecimento que uma troca de registro pode gerar. Dessa maneira, defendemos que a operação de conversão se torna mais relevante para a aprendizagem quando criamos possibilidades de explorar as particularidades existentes em cada registro.

Considerações Finais

A utilização do GeoGebra 3D nessa pesquisa oportunizou momentos relevantes aos processos de ensino e aprendizagem de Integrais Múltiplas, apoiados em aspectos ligados à visualização. Defendemos que essa experiência possa se tornar uma opção pedagógica frente às práticas tradicionais dos professores de Cálculo, principalmente, no ensino de Cálculo de Várias Variáveis.

Especificamente sobre o recurso computacional utilizado no desenvolvimento das sequências didáticas, afirmamos que o GeoGebra 3D pode contribuir para o ensino de Cálculo de Várias Variáveis de forma a valorizar a aprendizagem a partir da visualização, ou seja, de fato tornando nosso ensino voltado para a aprendizagem.

Por fim, salientamos a necessidade que nós, educadores matemáticos do Ensino Superior, especialmente os professores de Cálculo de Várias Variáveis, repensemos nossas práticas pedagógicas, valorizando a utilização de tecnologias disponíveis para a visualização de representações de superfícies e sólidos, tão fundamental para a aprendizagem de Quádricas, Integrais Duplas e Integrais Triplas.

Referências

ALVES, F. R. V**. Aplicações da sequência Fedathi na promoção do raciocínio intuitivo no Cálculo a Várias Variáveis**. Tese de Doutorado – Universidade Federal do Ceará, Faculdade de Educação, Fortaleza, 2011.

COMETTI, M. A. **Discutindo o ensino das Integrais Múltiplas no Cálculo de Várias Variáveis: contribuições do GeoGebra 3D para a aprendizagem**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2018.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, p.11-33, 2003.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FLORES, C.R. Registros de Representação Semiótica em Matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **BOLEMA**, v. 19, n. 26, p. 01-22, 2006.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage dês intégrales multiples: analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple.** Tese de Doutorado. Université Joseph Fourier, Grenoble, 2006.

HENRIQUES, A.; ATTIE J. P.; FARIAS L. M. S. Referências teóricas da didática francesa: análise didática visando o estudo de integrais múltiplas com o auxílio do *software* Maple. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**, v. 9, n. 1, p. 51-81, 2007.

MIRANDA, A. M. **As tecnologias da informação no estudo do Cálculo na perspectiva da aprendizagem significativa**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2010.

OLIVEIRA, F.L. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres humanos com mídias**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2014.