UMA REFERÊNCIA PARA A ELABORAÇÃO DE SABERES DOCENTES A PARTIR DA OBSERVAÇÃO E DA REFLEXÃO DE DIFICULDADES E DE ERROS SOBRE NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

A REFERENCE FOR THE ELABORATION OF TEACHER KNOWLEDGE FROM THE OBSERVATION AND REFLECTION OF DIFFICULTIES AND OF ERRORS ABOUT RELATIVE INTEGER NUMBERS

Raquel Gomes de Oliveira

Faculdade de Ciência e Tecnologia/FCT/Unesp, raquel.g.oliveira.@unesp.br

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar como licenciandos de Matemática, de uma universidade pública paulista, ao observar e relatar erros e dificuldades conceituais sobre Números Inteiros Relativos, a partir de suas vivências didático-pedagógicas nos estágios supervisionados, puderam desenvolver saberes docentes para o processo de ensino e aprendizagem desse conceito. Assim, analisar erros e dificuldades, demonstrados pelos alunos da Educação Básica sobre Números Inteiros Relativos, foi uma ação fundamental para que futuros professores de Matemática entendessem como necessária a organização de situações de ensino que oportunizem aos alunos elaborarem o conceito de Número Inteiro Relativo a partir da ampliação do conjunto dos Números Naturais, de suas propriedades e da ressignificação das operações de Adição e de Multiplicação com esses números. Concluímos que refletir sobre essa organização de ensino acabou se constituindo meio de desenvolvimento de saberes pedagógicos imprescindíveis para o processo de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

Palavras-chave: Número inteiro relativo, Ensino e aprendizagem, Formação de professores de matemática.

Abstract

This article aims to present as graduating in Mathematics, from a public university in São Paulo, have been able to develop teacher knowledge for the process of teaching and learning of this concept, observing and reporting conceptual errors and difficulties on Relative Integer Numbers, from their didactic-pedagogical experiences in the student teaching. Thus, analyzing errors and difficulties, demonstrated by students of Basic Education on Relative Integer Numbers, was a fundamental action for future Mathematics teachers to understand as necessary the organization of teaching situations that allow students to elaborate the concept of Relative Integer from the expansion of the set of Natural Numbers, its properties and the re-signification of Addition and Multiplication operations with these numbers. We conclude that reflecting on this teaching organization ended up being a means of developing pedagogical knowledge essential for the process of teaching and learning Relative Integer Numbers.

Keywords: Relative integer number, Teaching and learning, Mathematics teacher education.

Introdução

A partilha de experiências didáticas vivenciadas por futuros professores de Matemática (licenciandos), em situações de Estágio Curricular Supervisionado, tem sido caracterizada por discussões sobre a origem de dificuldades e de erros apresentados pelos alunos da Educação Básica no processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Especificamente sobre o conceito de Números Inteiros Relativos ou Números Inteiros, frequentemente o relato dos licenciandos é centrado no fato de que alunos do 7º ano "não sabem aplicar a regra de sinais, por mais que o professor ensine".

Em conformidade com os relatos dos licenciandos deveria haver aprendizagem dos alunos sobre o conceito de Números Inteiros, sobre suas propriedades e consequentes "aplicações de regras", porque o professor ensinou o conceito. Contudo, quando se questiona sobre o modo desse ensino, no sentido de haver oportunidades didático-pedagógicas para que os alunos aprendam sobre as propriedades dos números relativos e sobre a necessidade de, a partir dessas propriedades, ressignificar para esses números as operações de Adição e Multiplicação que realizam com os Números Naturais (N), evidencia-se que a maioria dos licenciandos não consegue responder a este questionamento e, quando respondem, é de forma afirmativa, o que é contraditório à realidade escolar observada e relatada.

Mas o que sabem os licenciandos sobre o conceito de Números Inteiros Relativos e sobre a origem das diferenças entre as operações de Adição e Multiplicação no conjunto dos Números Naturais e no conjunto dos Números Inteiros? Quais oportunidades tiveram para aprender sobre a ressignificação dessas operações baseadas em propriedades dos Números Inteiros Relativos? Qual a origem para eles das "regras de sinais" e como trabalhariam com as dificuldades dos alunos no que diz respeito à indiferenciação entre regras de sinais para a operação de Adição e aquelas atribuídas à operação de Multiplicação?

A resposta afirmativa dos licenciandos, em relação ao processo de ensino e aprendizagem dos Números Inteiros na escola, justificando, em parte, as questões acima, leva a supor que para os licenciandos de Matemática, o entendimento do conceito de Números Inteiros Relativos não está consolidado, a partir do princípio da extensão (CARAÇA, 2003) do conjunto N para o conjunto Z, que os levaria a entender sobre o que é próprio desses números e como essa propriedade é a base das diferenciações para operações com os Números Inteiros Relativos. Portanto, diante dessa suposição torna-se possível objetivar um trabalho didático-pedagógico com licenciandos de Matemática que intencionalmente os leve a elaborar saberes docentes e referências curriculares, que promovam competências docentes para o ensino de Números Inteiros Relativos.

Um currículo escolar que visa a competências que [...] caracterizam modos de ser, de raciocinar e de interagir, que podem ser depreendidos das ações e das tomadas de decisão em contextos de problemas, de tarefas ou de atividades (SÃO PAULO, 2011, p.12) [...] tem o compromisso de articular as disciplinas e as atividades escolares com aquilo que se espera que os alunos aprendam ao longo dos anos (SÃO PAULO, 2011, p.12). Com essa identidade, o currículo [...] supõe que se aceite o desafio de promover os conhecimentos próprios de cada disciplina articuladamente às competências e habilidades do aluno (SÃO PAULO, 2011, p.12).

> Logo, a atuação do professor, os conteúdos, as metodologias disciplinares e a aprendizagem requerida dos alunos são aspectos indissociáveis, que compõem um sistema ou rede cujas partes têm características e funções específicas que se complementam para formar um todo, sempre maior do que elas. Maior porque o currículo se compromete em formar crianças e jovens para que se tornem adultos preparados para exercer suas responsabilidades (trabalho, família, autonomia etc.) e para atuar em uma sociedade que depende deles. (SÃO PAULO, 2011, p.12).

Em relação ao conteúdo Número Inteiros Relativos espera-se que os alunos desenvolvam habilidades identificadas com as ações de: 1) Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos e 2) Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos (SÃO PAULO, 2011, p. 57).

No entanto, dos princípios curriculares, que sustentam um currículo para o desenvolvimento de competências, entende-se que

> A relação entre teoria e prática não envolve necessariamente algo observável ou manipulável, como um experimento de laboratório ou a construção de um objeto. Tal relação pode acontecer ao se compreender como a teoria se aplica em contextos reais ou simulados. Uma possibilidade de transposição didática é reproduzir a indagação de origem, a questão ou necessidade que levou à construção de um conhecimento – que já está dado e precisa ser apropriado e aplicado, não obrigatoriamente ser “descoberto” de novo. A lei determina corretamente que a relação entre teoria e prática se dê em cada disciplina do currículo, uma vez que boa parte dos problemas de qualidade do ensino decorre da dificuldade em destacar a dimensão prática do conhecimento, tornando-o verbalista e abstrato. (SÃO PAULO, 2011, p. 21).

Assim, é possível inferir que se licenciandos de Matemática não vivenciarem atividades didáticas, nas quais se apresentam as características e propriedades dos Números Inteiros Relativos, no sentido de serem instrumentos para resolução de problemas em diferentes contextos associados ao conceito de Número Inteiro Relativo, como esses licenciandos poderão superar referências de ensino que possuem e que têm origem em suas formações, como ex-alunos da Educação Básica, e aquelas que observam nos Estágios Supervisionados?

Tal como considerações sobre o conceito de Números Inteiros Relativos, dados de observação e de reflexão sistemática de licenciandos de Matemática, sobre erros e dificuldades associados a este conceito e suas respectivas análises, motivaram a realização de uma pesquisa, em andamento com esses licenciandos, cujo objetivo é analisar referências curriculares e saberes docentes para o ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

Neste texto apresentaremos esses dados e suas respectivas análises, concluindo que podem ser fundamentais como orientadores da elaboração de saberes docentes sobre Números Inteiros Relativos, desde a formação inicial de professores de Matemática.

Sobre o conceito de Número Inteiro Relativo

Um número inteiro relativo é assim denominado por ser elemento do Conjunto dos Números Inteiros Relativos (Z), que tem origem explicada no fato de que "Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios." (Caraça, 2003, p. 9). O princípio que fundamenta a origem dos Números Inteiros Negativos é o princípio de extensão do conhecimento.

> [...] como um dado real que não pode ser posto de lado, [...] o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento [...] e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. (CARAÇA, 2003, p. 9).

Nesse sentido, o número inteiro relativo é considerado a generalização do número natural ao se apropriar de características do conjunto do qual este faz parte (Conjunto N), mas ampliando-as no sentido de superar, no contexto dos Números Naturais, a impossibilidade de se resolver a situação a – b, na qual b > a. No campo numérico originado pela reelaboração de propriedades do Conjunto N, a situação a – b, na qual b > a, é resolvida sendo equivalente ao resultado c, onde c é reconhecido como elemento do conjunto dos Números Inteiros Relativos (Z), estando, portanto sob as propriedades deste novo conjunto.

Se a definição formal para um número inteiro relativo não apresenta dificuldades quanto ao seu reconhecimento e aplicação como um número, historicamente esse reconhecimento e essa aplicação foram caracterizados por diferentes dificuldades que têm apresentado origem tanto no entendimento das características deste número como na sua utilização em situações sociais (GLAESER, 1985; BOYER, 1991; STRUIK, 1992).

> […] a palavra "negativo" tem o significado de negação, isto quer dizer que se trata de "não – números", e esta expressão é a mais adequada para mostrar as dificuldades que se opunham ao espírito humano na conquista de novos domínios no reino dos números. (KARLSON, 1961, p. 42).

Exemplo dessas dificuldades é a ampliação do conceito de zero em Z. O que era o conceito de ausência nos Números Naturais, possibilitando a criação de um símbolo para o mesmo, constituindo assim "... um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão." (Pelseneer, 1935 apud Caraça, 2003, p. 6), no conjunto Z deve, a despeito de contextos, ser entendido tanto como a ausência de quantidade quanto como a origem de grandezas que se apresentam em sentidos opostos, e que portanto se anulam ou se compensam, constituindo um "zero móvel".

Outro exemplo de dificuldades relacionadas com o entendimento dos Números Inteiros é a representação de Z na reta numérica, dada a partir da extensão dos Números Naturais. A reta numérica, por esse princípio, é um campo de pontos que possui uma relação bijetora com os Números Inteiros Relativos, ou seja, cada ponto da reta está associado a um e somente um número inteiro relativo. O fato de ser tomado como um campo numérico ordenado imprime a cada número, de acordo com sua posição, ser maior e menor que outros números, levando à necessidade de superar o conceito errôneo da reta numérica como justaposição de dois conjuntos de números: os positivos à direita e os negativos à esquerda, pois entender a reta numérica como justaposição de dois conjuntos significa é contrário ao entendimento no qual a reta numérica é

> [...] uma representação que expressa operação ou coordenação entre estados (+ e -) e transformações (deslocamentos à direita e à esquerda) através de imagens não apenas reprodutoras, mas passíveis de antecipações de movimentos ou transformações. (PIAGET, INHELDER, 1966/1977 apud TEIXEIRA, 1992, p. 313).

É com base na ideia de justaposição entre números positivos e negativos que procedimentos relativos à ordenação entre os números inteiros relativos, identificam-se com compará-los não a partir do sentido de ordenação da reta (da esquerda para a direita), mas ignorando a posição do número, dada por seu sinal e, portanto, lidando com este número em termos de seu módulo apenas. Exemplo disso são as comparações, consideradas verdadeiras, por muitos alunos, tais como: = –7 > – 3.

Para Teixeira (1993) a ressignificação do conceito de número e das operações de Adição e de Multiplicação é fundamental para a aprendizagem dos Números Inteiros Relativos. Se no conjunto N um número designa uma quantidade ou está para ser sempre relacionado a processos de contagem, um número pertencente ao conjunto Z designa uma quantidade, investida de qualidade, que não está necessariamente ligada a processos de contagem. A qualidade investida à quantidade é tida como uma relação orientada (CARAÇA, 2003), pois se estabelece ao estado do número em termos de uma referência (zero origem), a partir da qual, quantidades iguais com qualidades opostas se anulam e quantidades diferentes com qualidades opostas se compensam.

Sobre a ressignificação das operações de Adição e de Multiplicação, se no conjunto N a operação de Adição se identifica com a ação de acrescentar e a operação de Subtração (considerada operação inversa da Adição) com as ações de tirar, comparar e completar, no conjunto Z, essas operações acontecem por composições entre quantidades investidas de qualidades que definem a operação realizada. Assim, para qualidades iguais a operação de Adição se identifica com acréscimo, no qual permanece a qualidade comum aos números adicionados: (–4) + (–3) + (–2) = – 4 – 3 – 2 = – 9, sintetizada na regra: “sinais iguais soma, e dá o sinal comum.”

Já a operação de Adição entre números com qualidades opostas, assentada na propriedade na qual quantidades iguais com qualidades opostas se anulam, pode sempre ser identificada com a ação de compensação entre quantidades: (–7) + (+3) = –7 + 3 = –4, sintetizada na regra: “sinais diferentes, subtrai e dá o sinal do maior”.

Para subtrair elementos do conjunto Z, “... é fundamental que o esquema de assimilação para subtração esteja estruturado com base na abstração do invariante da inversão e não simplesmente no conceito de tirar.” (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Isto porque se existem situações nas quais a operação de subtração em Z pode ser realizada identificando-se com a operação de subtração em N, tal como (+8) – (+6) = +8 – 6 = +2, haverá igualmente situações nas quais essa identificação não é possível. Por exemplo, para se chegar que (+8) – (– 6) = +8 + 6 = + 14 é necessário perceber que, mesmo sendo denominada operação de Subtração e mesmo continuando a ter o símbolo (–) para representá-la, no conjunto Z as ideias tirar, de completar e de comparar, associadas à operação de Subtração com números naturais, necessariamente deixam de existir. Isto porque propriedades de Z permitem agora atribuir ao símbolo (–) um operador de inversão de operações e qualidades. Essa característica da Subtração em Z, em questões de ensino e aprendizagem, tem como consequência o repensar de modelos didático-pedagógicos que fazem uso das operações em Z.

Situações relacionadas à operação de multiplicação, quando interpretadas à luz de propriedades de Z, associam-se com situações de adição também em Z, fundamentando regras, tais como: “na multiplicação...”

a) ‘Sinais iguais, dá mais”:

(+2). (+3) = (+3) + (+3) = +3 + 3 = +6 e (– 2). (– 3) = +6

b) “Sinais diferentes, dá menos”:

(+2). (– 3) = (– 3) + (– 3) = – 3 – 3 = – 6 ou (– 3). (+2) = – 3 – 3 = – 6.

Mas como aprender a diferenciar regras da operação de adição daquelas da operação de subtração? Qual significado a dar para multiplicação entre fatores negativos? E finalmente, por que, na multiplicação entre dois fatores negativos, o resultado é positivo?

Da aprendizagem operatória de conceitos, apresentam-se pressupostos que podem orientar a prática pedagógica, no sentido de especificamente oportunizar a compreensão de regras como a síntese de procedimentos regulares e que, portanto puderam ser generalizados e são passíveis de serem reapresentados através de regras. Um desses pressupostos se identifica com o reconhecimento de que aprendizagem de conceitos não ocorre por definição (PIAGET, VYGOTSKY, SKEMP, VERGNAUD). Contrariamente a definições, a aprendizagem de conceitos tem origem a partir da qualidade da relação entre quem aprende e o conceito a ser aprendido. Logo, nas coordenações de ações e operações e na busca por padrões e regularidades que proporcionam e justificam generalizações, que existem porque houve abstração.

A formação conceitual dos Números Inteiros Relativos e de suas possibilidades em termos de habilidades e competências dos alunos, para resolverem problemas nos quais estes números são meios, assenta-se em bases que não se identificam com definições ou proposições, mas naquelas nas quais os alunos dominam as propriedades que regem os inteiros como um sistema (TEIXEIRA, 1993). Portanto, essa ideia de formação conceitual leva a entender que questões e dificuldades que se apresentam sobre os Números Inteiros Relativos podem justificar, para a perspectiva de ensino e aprendizagem dos mesmos, a vivência de experiências docentes nas quais licenciandos de Matemática possam ter oportunidades de refletir e de agir a partir do que sabem sobre Números Inteiros Relativos e do que sabem sobre o ensino de Números Inteiros Relativos com vistas à elaboração e ampliação de saberes docentes sobre esse conceito.

Procedimentos metodológicos

Observações e reflexões sistemáticas sobre dificuldades e erros, apresentados por alunos da Educação Básica sobre o conceito de Números Inteiros Relativos, foram realizadas e relatadas por 22 licenciandos de Matemática de uma universidade pública paulista. Contribuíram igualmente para essas observações e reflexões as experiências desses licenciandos como ex – alunos da Educação Básica.

Como meio de observação e reflexão sistemática dos licenciados foram utilizadas 2 questões abertas: 1) Nas experiências que você tem, como estagiário ou em outra situação em sala de aula da Educação Básica, quando nas aulas de Matemática se trabalha o conteúdo Números Inteiros Relativos, quais são os erros e dificuldades apresentados pelos alunos? e 2) Na situação de licenciando de Matemática, o que você acredita que seriam suas dificuldades e dúvidas quando estivesse trabalhando em sala de aula o conteúdo Números Inteiros Relativos?

Para a significação das respostas dos licenciados, com vistas a suas análises, foi utilizada a Análise Textual Discursiva, com seus três momentos: 1) unitarização (desmontagem do texto em busca de unidades conceituais representativas); 2) categorização (apreensão comparativa entre ideias representativas e agrupamento de ideias semelhantes) e 3) metatexto (meio de compreensão do todo a partir de descrições e análises) (MORAES; GALIAZZI, 2011).

A análise das respostas dos 22 licenciandos às questões 1 e 2 possibilitou que erros e dificuldades quanto a Números Inteiros Relativos, na perspectiva do aluno e na perspectiva do professor, estivessem relacionados às categorias da tabela 1 e da tabela 2, respectivamente. Os licenciandos foram denominados por L_1, L_2…L_{22} e suas respostas às 2 questões foram contabilizadas em termos de frequência. Nesse sentido, um mesmo licenciando pode ter sua resposta classificada em mais de uma categoria, já que estas, nesta pesquisa, não se apresentam como excludentes.

Resultados e análises

Tabela 1: Categorias e frequências associadas a erros e dificuldades sobre Números Inteiros Relativos

Categorias	Frequências	%
1) Conceitualização		
a) existência de número negativo;	3	8,8
b) ideia/referência para número negativo.	8	23,52

Total	11	32,35
2) Operações com Números Inteiros		
a) desconsideração do sinal da operação;	3	8,8
b) desconsideração do sinal negativo do número.	3	8,8
c) ideia de subtração em Z associada às ideias de subtração em N.	2	5,89
d) outros	4	11,76
Total	12	35,29
3) Representações de Z		
a) reta numérica;	5	14,71
b) Conversão entre representações: situações práticas e expressões numéricas.	4	11,76
Total	09	26,47
4) Regras: indiferenciação da regra para adição e multiplicação;	2	5,89
Total	34	100

Fonte: Dados da Pesquisa

Em conformidade com a tabela 1, as categorias de análise, elaboradas a partir das respostas dos licenciandos de Matemática à questão 1, identificaram-se com aspectos relativos ao processo de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos relacionados com: 1) conceitualização, 2) operações, 3) representação e 4) regras de sinais. De modo geral, respostas dos licenciandos sobre dificuldades e erros dos alunos, em situações de aprendizagem sobre Números Inteiros Relativos, podem ser identificadas com aquelas encontradas no processo epistemológico de elaboração desses números, tal como discutido por Glaeser (1985), Struik (1992) e Teixeira (1993), por exemplo.

Onze (32.35%) das 34 respostas dadas pelos 22 licenciandos relacionaram as dificuldades e erros dos alunos ao processo de conceitualização de um Número Inteiro Relativo (NIR), sendo que 3 (8.8%) dos licenciandos se referiram à própria existência desse número e 8 (23.35%) licenciandos citaram a questão de ideia ou referência para o entendimento de um NIR. A referência dos licenciandos sobre erros e dificuldades dos alunos associados à conceitualização de um Número Inteiro Relativo possibilita reconhecer a necessidade de desenvolvimento de saberes docentes a partir do caminho inverso da apresentação sistematizada desse número, ou seja, como resultado da operação entre dois números inteiros sem que necessariamente o minuendo seja maior ou igual ao subtraendo.

> Pensava na régua, por exemplo: como poderiam existir números que estivessem “atrás” do zero??? Era como se não fizesse sentido...” e como operações: “Outra dificuldade, era fazer contas do tipo 2 – 5: como tirar 5 de 2????? Até que os exemplos com dívidas ajudaram a entender como esse cálculo era possível. (LICENCIANDO 8).

Nessa perspectiva, assinala-se como uma positiva ação, para experiências didático-pedagógicas na licenciatura em Matemática, a retomada da contextualização histórica da necessidade de ampliação do campo numérico dos Números Naturais (CARAÇA, 2003; STRUIK, 1992), oportunizando assim aos licenciandos de Matemática o desenvolvimento de saberes referenciais para o processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo que sejam determinantes para sua conceitualização pelos alunos da Educação Básica. Por exemplo, a reelaboração da operação de subtração a partir da superação de ideias iniciais como tirar ou subtrair um número do outro, pensando-se agora em ideias relacionadas tanto ao resultado de uma operação entre estados (positivos ou negativos) como em transformações (deslocamento à esquerda ou à direita) a partir de um ponto (zero origem) (TEIXEIRA, 1993).

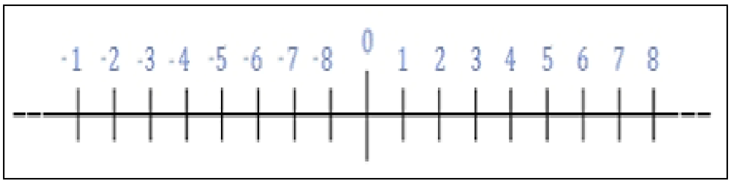
Sobre dificuldades e erros dos alunos associados a operações com Números Inteiros Relativos, 3 (8.8) dos licenciandos citaram a desconsideração do sinal da operação; 3 (8.8) dos licenciandos citaram especificamente a desconsideração do sinal negativo do número; 2 (5.89%) se referiram à ideia de subtração em Z associada às ideias de subtração em N e 4 (11.76%) dos licenciandos deram respostas que se referiam às operações com Números Inteiros, mas não especificavam o aspecto relacionado a erros e dificuldades.

Pode-se afirmar como muito proveitosa a percepção de 8 (23.52%) licenciandos de Matemática sobre os aspectos específicos relacionados às operações entre Números Inteiros no que diz respeito a pensar em atividades didáticas a serem intencionalmente desenvolvidas na licenciatura em Matemática para a elaboração de referenciais de saberes docentes para o ensino e aprendizagem deste conceito. Isto porque essas atividades deverão carregar em si a possibilidade de entendimento de que no conjunto Z, um número não mais representa somente uma contagem, como acontecia em N. Em Z, um número representa uma quantidade investida de qualidade, que acontece sob uma relação orientada (CARAÇA, 2003). As dificuldades e erros apresentados pelos alunos da Educação Básica permitem refletir sobre oportunidades que seus professores de Matemática tiveram, na formação inicial, para desenvolverem saberes docentes relacionados ao processo de ensino e aprendizagem de um Número Inteiro Relativo.

> Os alunos têm dificuldade em soma e multiplicação quando há números negativos. Por exemplo, na soma quando há negativo + positivo, eles dizem que o resultado deve dar negativo, pois “mais com menos dá menos”. Ou em outro caso fazem a subtração, mas não entendem como “descobrir” o sinal do resultado, principalmente quando o negativo vem na frente, por exemplo, sabem que 5 – 2 é igual a 3, mas não sabem quanto é: -2 + 5. (LICENCIANDO 6).

Descrições sobre erros e dificuldades relacionadas à reta numérica por 5 (14.71%) licenciandos de Matemática e à conversão entre representações de situações práticas e expressões numéricas por 4 (11.76%) licenciandos de Matemática puderam ser entendidas como erros e dificuldades relacionadas a representações em Z. Especificamente o exemplo de erro relacionado à reta numérica (figura 2) leva tanto a entender a dificuldade dos alunos da Educação Básica para o entendimento da reta como um campo ordenado, como também permite perceber que licenciandos de Matemática não utilizam esse entendimento de reta numérica ao descrever erros e dificuldades dos alunos.

Figura 2 – Exemplo de representação de Números Inteiros na reta numérica realizada por aluno da Educação Básica



Fonte: resposta dada por licenciando para a questão 1

Nesse sentido, atividades pedagógicas com o conceito de reta numérica que superem a ideia de justaposição de conjuntos com números positivos à direita do zero e negativos à esquerda do zero mostram-se necessárias na formação inicial de professores de Matemática. Essas atividades oportunizarão aos licenciandos entenderem dificuldades e erros dos alunos da Educação Básica para ordenarem e compararem Números Inteiros Relativos.

Quanto à utilização de regras de sinais, 2 (5.89%) licenciandos descreveram claramente dificuldades e erros dos alunos relacionados à indiferenciação dessas em situações de operação de adição e de operação de multiplicação. É possível novamente entender que, assim como para erros e dificuldades relacionadas a operações com Números Inteiros, é preciso que licenciandos de Matemática percebam que o trabalho pedagógico que leve alunos da Educação Básica ao entendimento de uma regra e a sua diferenciação seja caracterizado pela conceituação de um Número Inteiro Relativo a partir de diferentes contextos nos quais estados e transformações estejam presentes, como defende Teixeira (1993).

Tabela 2 - Categorias e frequências associadas a dificuldades e dúvidas dos licenciandos sobre a prática pedagógica de Números Inteiros Relativos

Categorias	Licenciandos	Frequência	%
1) Introdução do Conjunto Z Forma de ensinar/abordar sobre Números Inteiros Relativos	L_{2}, L_{3}, L_{4}, L_{14} e L_{17}, L_{19}, L_{20} e L_{21}		29,63
		08	29,63
2) Operações com Números Inteiros a) Adição e Subtração;	L_{7}, L_{8}, L_{13}, L_{15} e L_{18}	5	18,51
b) Multiplicação e Divisão;	L_{8}, L_{11} e L_{12}	3	11,11
c) Ordenação; d) Outros	L_{4} e L_{7} L_{20}	2 1	7,41 3,7
		11	40,74
3) Representações de Z a) reta numérica;	L_{1} e L_{6}	2	7,41
b) formas para representar números inteiros.	L_{4} e L_{22}	2	7,41
		04	14,82
4) Respostas não pertinentes à questão	L_{5}, L_{9}, L_{10} e L_{16}	4	14,82
		04	14,82
Total		27	100

Fonte: categorias elaboradas a partir das respostas dos licenciandos à questão 2

Na tabela 2, encontram-se categorias e frequências de respostas relativas à prática pedagógica de Números Inteiros Relativos abordada pela questão 2. Das 4 categorias apresentadas nesta tabela, 2 categorias igualmente compõem a tabela 1: Operações com

Números Inteiros e Representações de Z.

Onze licenciandos (40,74%) consideraram as operações com Números Inteiros como item de dificuldades e de dúvidas na condição de professor durante o processo de ensino e aprendizagem e 4 licenciandos (14,82%) consideram as Representações de Z para dificuldades e dúvidas docentes.

> Acho que a maneira de introduzir a multiplicação, pois a soma e a subtração falamos em ganhar ou perder, mas e a multiplicação? Como introduzir de forma que eles entendam o algoritmo? (LICENCIANDO 11).
>
> A minha principal dificuldade vai ser fazer com que os alunos entendam que subtrair um número negativo é o mesmo que somá-lo. (LICENCIANDO 13).
>
> [...] minhas principais dificuldades […] estarão embasadas em como explicar para os alunos esse conceito de "maior que" e "menor que", sendo que ao tentar explicar uma vez no estágio, utilizei um exemplo envolvendo temperatura: "Qual é a temperatura vai estar mais quente: -10ºC ou -1ºC?" Eles respondiam corretamente, mas ao fazer a relação com o número zero, para colocarmos na reta numérica, eles não conseguiam compreender. […] uma das dificuldades será tentar fazer a criança pensar em situações reais para tentar ajudar em seu desenvolvimento e qual situação é mais fácil para que o aluno pense corretamente, se estou ou não usando exemplos que pode fazer com que o aluno se desenvolva ou se estou apenas "abafando o problema". (LICENCIANDO 4).

Exemplos de respostas dos licenciandos sobre dúvidas e dificuldades quanto ao processo de ensino e aprendizagem de operações (Adição, Subtração, Multiplicação, Divisão e Ordenação) e de representações de Números Inteiros se associam às dificuldades de conceitualização desses números e de superação de ideias operacionais próprias dos Números Naturais e que necessitam, como visto, ser superadas para operações com Números Inteiros Relativos (TEIXEIRA, 1993).

Igualmente as representações de números pertencentes a Z, incluindo o contexto de reta numérica, apresentam-se como dificuldades docentes associadas à conceitualização de um Número Inteiro Relativo, precisamente sobre a operação que o origina, seguida de representações de estados (resultados de operações) e transformações (operações a serem realizadas).

É nessa perspectiva, a de "[...] reproduzir a indagação de origem, a questão ou necessidade que levou à construção de um conhecimento – que já está dado e precisa ser apropriado e aplicado, não obrigatoriamente ser "descoberto" de novo." (São Paulo, 2011, p. 21),que se justifica na formação inicial de professores de Matemática um trabalho didático-pedagógico no qual essas dificuldades sejam intencionalmente conteúdo de reflexão e meio de desenvolvimento de saberes docentes sobre o conceito de Número Inteiro Relativo.

Dificuldades e dúvidas relacionadas à categoria Introdução do Conjunto Z (Forma de ensinar/abordar sobre Números Inteiros Relativos) foram apontadas por 8 (29,63%) licenciandos.

> Tendo em vista as dificuldades apresentadas pelos alunos em minha sala de estágio, as principais dificuldades e dúvidas que meus futuros alunos provavelmente terão sobre o assunto, serão: compreender a ideia de ordenação com números negativos, [...], por exemplo, a reta numérica é do menor para o maior (da esquerda para a direita), no entanto para eles o -10 é maior que -1, então haverá uma ordenação. (LICENCIANDO 4).

> A dificuldade estaria em que muitos alunos não conseguem, em um primeiro momento, compreender como podem existir quantidades negativas ou, de outra forma, como as faltas podem ser representadas por números assim como as quantidades, já eram representadas pelos números naturais. (LICENCIANDO 21).

Exemplos de dificuldades e dúvidas apresentadas pelos licenciandos para o que se denominou, a partir de procedimentos de Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2011) como a Introdução do Conjunto Z, levam a entender que operações e representações de um Número Inteiro Relativo, em contextos diversificados, concorrem para sua conceitualização. Colaboram com essa conclusão as categorias de respostas e suas análises para a questão 1, que abordava a observação e reflexão dos licenciandos sobre dificuldades e dúvidas apresentadas pelos alunos da Educação Básica no processo de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos.

Assim, justifica-se novamente oportunizar na formação inicial de professores de Matemática a vivência de experiências didáticas nas quais um conceito é formado a partir de diferenciações entre situações as quais se aplica e por diferentes representações que pode ter nestas situações (VERGNAUD, 1990). Nesse parâmetro de formação de um conceito é possível vivenciar pressupostos curriculares para a finalidade de aprendizagem do conceito de Números Inteiros Relativos ao levar o aluno a: 1) Compreender o significado dos números negativos em situações concretas, bem como das operações com negativos e 2) Saber realizar de modo significativo as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de números negativos (SÃO PAULO, 2011).

Os licenciandos L_5, L_9, L_{10}, L_{16} e L_{21} não responderam à questão 2 reportando-se a dificuldades e dúvidas e sim descrevendo como ensinariam Números Inteiros.

> Eu sendo professor do Ensino Fundamental II trabalharia bem pesado nessa questão. Todo exercício que me levasse a uma situação onde era preciso operacionar números negativos, eu daria mais atenção, procuraria observar como os alunos fazem essa parte, procuraria identificar suas dificuldades e possíveis erros e trabalhar em cima disso para que não acontecesse deles chegarem até o Ensino Médio com essa dificuldade básica […]. (LICENCIANDO 5).

Uma referência para a elaboração de saberes docentes sobre Números Inteiros Relativos desde a licenciatura em Matemática

Ao considerar a interação entre quem aprende e algo a ser aprendido diante uma determinada situação ou contexto, a formação de um conceito tem origem na associação com outras situações, em outros contextos, acarretando a utilização de diversos invariantes operatórios e igualmente diversas representações (VERGNAUD, 1990). Essa consideração orientará nosso trabalho didático-pedagógico, com futuros professores de Matemática, no qual representações, situações e contextos diversificados serão considerados na elaboração de saberes docentes sobre o conceito de Números Inteiros Relativos porque a epistemologia deste conceito (GLAESER, 1985; BOYER, 1991; STRUIK, 1992; CARAÇA, 2003) se associa ao que pressupõe Vergnaud (1990), sobre a formação de um conceito, permitindo entender que tanto contextos, situações e representações contemplam o que é próprio e invariante ao conceito de Números Inteiros Relativos, ou seja, a coordenação entre processos cognitivos que transitam entre percepções de um Número Inteiro Relativo como estado (resultado de uma operação) e transformações (operações a serem realizadas).

Para Vergnaud (1990), a representação acontece, instituindo-se diante da estreita ligação entre significante e significado, Nesse sentido, a representação é fundamental para a análise da formação de um conceito e de sua utilização. A ligação entre significante e significado corresponde a relações entre representações, tais como: falas, símbolos, desenhos, fórmulas, diagramas, gráficos… e conteúdos do próprio significado, tais como: invariantes de diferentes níveis, inferências, regras de ação e proposições. A perspectiva de formação conceitual defendida por Vergnaud (1990) igualmente é tomada no sentido de poder subsidiar aos licenciandos de Matemática a elaboração e a ampliação do conceito de regra, por exemplo, diante de processos de aprendizagem operatória. Assim, uma regra

> […] deveria ser o resultado das observações das regularidades ou invariantes ao qual o aluno chega por coordenações progressivas entre diferentes situações ou modelos, enfim, contextos diversos. Em não sendo, elas se tornam mecânicas e aleatórias. (TEIXEIRA, 1992, p. 337).

Conforme as considerações teóricas apresentadas, infere-se que a elaboração conceitual de um Número Inteiro Relativo necessariamente está vinculada a reelaborações de conceitos tendo em vista as propriedades do Conjunto dos Números Inteiros Relativos (Conjunto Z ou Z). Entre essas reelaborações encontram-se: 1) o conceito de número e especificamente o conceito do zero; 2) o conceito de reta numérica; 3) o conceito de ordenação em Z e 4) significação das operações em Z e suas respectivas regras de sinais. Conceitos que nesta pesquisa revelaram-se como fontes de dificuldades para licenciandos de Matemática, tanto quando observaram os alunos da Educação Básica, como quando se colocaram na situação do professor que ensinará os mesmos. Igualmente esses conceitos apresentam dificuldades relatadas pelos licenciandos questões que podem justificar e orientar a elaboração de saberes docentes para o ensino de Números Inteiros Relativos desde a formação inicial de professores de Matemática.

Conclusões

Em conformidade com os resultados e suas respectivas análises, é possível considerar, na formação inicial de professores de Matemática, o desenvolvimento de saberes docentes para o processo de ensino e aprendizagem de Números Inteiros Relativos, que considere erros e dificuldades conceituais dos alunos da Educação Básica. Nesse sentido, os saberes docentes têm origem em situações didáticas e contextos com Números Inteiros que oportunizem aos futuros professores compreender que o ensino de Números Inteiros Relativos deve possibilitar a quem os aprende descobrir relações e questões além das que está acostumado, por exemplo, com os Números Naturais, pois concepções, modelos e teorias dos alunos são formados a partir das situações as quais são submetidos (VERGNAUD, 1990).

As diretrizes curriculares para a formação de professores pressupõem que "É imprescindível que haja coerência entre a formação oferecida e a prática esperada do futuro professor e conceitos curriculares para a formação de professores." (BRASIL, 2001, p. 30). Logo, possibilitar que futuros professores de Matemática pudessem refletir a partir de erros e de dificuldades apresentados pelos alunos da Educação Básica, com o objetivo de compreender a natureza das situações de ensino que podem tornar efetivo o processo de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e igualmente ter consciência do que sabem sobre o conceito de Números Inteiros Relativos e do que sabem sobre o ensino de Números Inteiros Relativos, mostrou-se um efetivo meio de elaboração e também de ampliação de saberes pedagógicos sobre este conceito, em consonância com essas diretrizes curriculares, o que leva a compreender e defender, quanto ao desenvolvimento de saberes do professor, que "... deve haver coerência entre o que se faz na formação e o que dele se espera como profissional." (BRASIL, 2001, p. 30).

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação/Conselho Pleno. **Parecer 09 de 08 de maio de 2001.** Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/009.pdf. Acesso em: 03 dez. 2017

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1991.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2003

GLAESER, G. Epistemologia dos Números Negativos. Rio de Janeiro: **Boletim GEPEM,** 1985.

MORAES, R; GALIAZZI, M. C. **Análise Textual Discursiva.** Ijuí: Editora Unijuí, 2011.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. 2. ed. Lisboa: Gradiva, 1992.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem Operatória de Números Inteiros: Obstáculos e Dificuldades. In: **Pro-Posições,** nº 1, v. 4, 1993, p. 60 – 72.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação**. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias** / SE; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. ed. atual. – São Paulo: SE, 2011.72 p.

VERGNAUD, G. Psicologia cognitiva e do Desenvolvimento e Pesquisas em Educação Matemática: Algumas Questões Teóricas e Metodológicas. In: **Caderno do CEM**. Ano 2, nº2, 1990, p. 19 – 39.

WHITEHEAD, J. Using a living theory methodology in improving practice and generating educational knowledge in living theories. In: **Educational Journal of Living Theories.** v. 1, n. 1, p. 103 – 126, 2008. Disponível em: http://ejolts.net/node/80. Acesso em: 10 jun. 2016.