

# A APRESENTAÇÃO DE FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARITMICAS EM LIVROS DIDÁTICOS PARA O ENSINO MÉDIO

**Cristina Masetti**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo / [crismasetti@hotmail.com](mailto:crismasetti@hotmail.com)

**Célia Maria Carolino Pires**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo / [celia@pucsp.com.br](mailto:celia@pucsp.com.br)

## Resumo

O presente artigo é um recorte de nossa dissertação de mestrado que tem como objetivo investigar como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas em livros didáticos de Matemática, oferecidos às escolas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, no Ensino Médio de 2015 e como é proposta a construção, sistematização e consolidação de conhecimentos nesses manuais. Nosso propósito é analisar situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações que o livro didático apresenta, contabilizando diferentes tipos de tarefas que os autores propõem ao estudante para aplicação dos conhecimentos. O estudo alicerça-se na revisão da literatura sobre a análise de manuais, as orientações curriculares de Matemática para o Ensino Médio, e o livro do 1º ano do Ensino Médio das seis coleções aprovadas pelo PNLD de 2015; a publicação *Mathematics Teachers at Work – Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction* (2009), coordenada por Janine T. Remillard, Professor Associado de Educação da Faculdade de Educação da Universidade da Pensilvânia, Beth A. Herbel-eisenmann, Professora Assistente de Formação de Professores, Michigan State University e Gwendolyn M Lloyd, professor do Departamento de Matemática, Virginia Tec. Optou-se pela metodologia de natureza qualitativa e a técnica utilizada foi análise documental; o instrumento de recolhimento de dados foram grelha de análise.

**Palavras-chave:** Livro didático. Função Exponencial e Logarítmica. Situações de aprendizagem.

## Introdução

Nossa investigação insere-se no Grupo de Pesquisa “Desenvolvimento Curricular em Matemática e Formação de Professores, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Esse Grupo desenvolve diferentes projetos de pesquisa dentre os quais, o que se intitula “Relações entre professores e materiais que apresentam o Currículo de Matemática: um campo emergencial”, do qual fazemos parte. A proposta deste projeto teve início em 2012 e

busca realizar estudos sobre materiais que apresentam o currículo de Matemática, com foco na relação que o professor estabelece com eles. Esse tema tem se mostrado um campo de investigação a ser explorado, uma vez que as pesquisas sobre currículos prescritos de Matemática evidenciam que, embora eles possam expressar propostas interessantes e inovadoras, parecem ter dificuldades de se incorporarem à prática dos professores em sala de aula.

Um dos pressupostos desse projeto é o de que os currículos moldados pelos professores e efetivamente praticados em sala de aula são uma realidade pouco conhecida. Embora existam pesquisas sobre o assunto, elas ainda são isoladas e não configuram um campo de investigação. Como professores organizam o currículo? Que materiais utilizam? Como priorizam as tarefas que propõem a seus alunos? Como os professores se relacionam com materiais que explicitam o currículo prescrito? Essas são algumas das questões para as quais ainda não temos respostas.

No texto de apresentação do projeto, Pires (2012) relata que ao buscar na literatura aportes para reflexões, o grupo encontrou a publicação *Mathematics Teachers at Work – Connecting Curriculum Materials and Classroom Instruction*, coordenada por Janine T. Remillard, Professora Associado de Educação da Faculdade de Educação da Universidade da Pensilvânia, Beth A. Herbel-eisenmann, Professora Assistente de Formação de Professores, Michigan State University e Gwendolyn M Lloyd, professor do Departamento de Matemática, Virginia Tech.

Na apresentação do livro, esses coordenadores destacam que se trata da primeira coleção para compilar e sintetizar pesquisa sobre o uso que os professores fazem de materiais curriculares de Matemática e o impacto que eles causam no ensino. Destacam que em resposta a um campo de pesquisa de rápido crescimento, o livro coloca uma ênfase particular – mas não se limita a – nos materiais curriculares desenvolvidos em resposta às normas do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM).

Em um dos artigos dessa publicação, Matthew William Brown (2009) apresenta um quadro, nomeado *The Design Capacity for Enactment Framework* (DCE) que explicita os elementos que constituem a relação professor-material curricular.

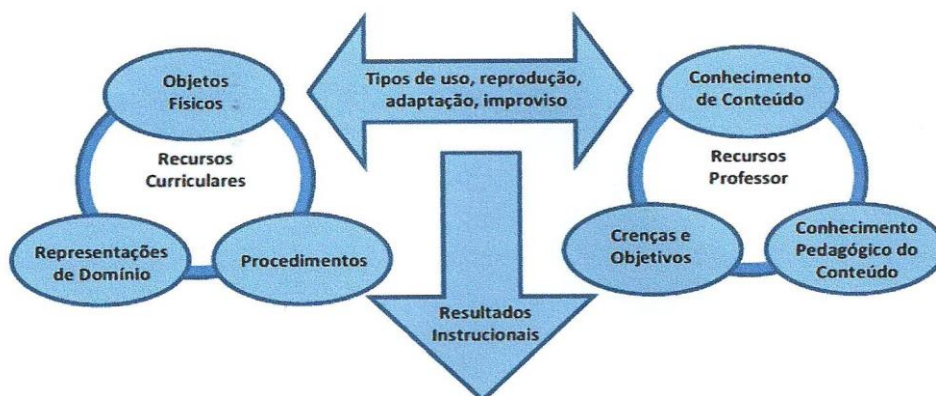


Figura 1 – *The Design Capacity for Enactment Framework* (Brown, 2009, p.26).

O esquema apresenta os dois lados da relação. Os recursos curriculares incluem as diferentes representações, como os objetos físicos, que se referem à disposição,

organização ou formatação das imagens e textos entre outros objetos físicos que compõem o material. Os materiais curriculares também são compostos por procedimentos, ou seja, representações de tarefas por meio de instruções e roteiros para professores e também para alunos. E por fim incluem as representações dos conceitos, chamadas pelo autor de representações de domínio, que se referem à forma como os conceitos são apresentados, em que sequência, o uso ou não de diagramas, como as explicações e descrições são expostas de acordo com as intenções do elaborador.

Nossa investigação situa-se num dos polos dessa relação, o material curricular. Formulamos como questão de pesquisa: Como as funções exponenciais e logarítmicas são abordadas em livros didáticos de Matemática oferecidos às escolas brasileiras pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, do Ensino Médio de 2015 e como é proposta a construção, sistematização e consolidação de conhecimentos nesses manuais?

Nosso propósito é o de analisar situações de aprendizagem matemática, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações que o livro do estudante apresenta, contabilizando diferentes tipos de tarefas que os autores propõem ao estudante.

A escolha pelo tema funções justifica-se pelo papel importante que elas têm no currículo do Ensino Médio, além de serem um conhecimento fundamental para os estudantes que ingressam em diversos cursos no Ensino Superior.

Em função da problemática em estudo, utilizamos metodologia de natureza qualitativa. A técnica utilizada foi a análise documental e o instrumento de coleta de dados é uma grade de análise utilizada por autores como Carla Isabel Teixeira T. Rebimbas da Fonseca inspirada nos trabalhos de Ordóñez (2011). Na pesquisa vamos analisar seis livros, ou seja, as coleções aprovadas pelo PNLDEM 2015. Neste artigo apresentamos a análise de um dos livros, uma vez que nosso trabalho está em andamento.

### **Análise da proposta de uma das coleções**

Nossa análise refere-se à coleção MATEMÁTICA – Ciências e Aplicações de autoria de Gelson Iezzi, Oswaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida. O tema “Funções Exponenciais e Logarítmicas” é abordado no volume destinado ao primeiro ano do ensino médio, a seguir dos capítulos que tratam de função quadrática e posteriormente a função modular. O autor dedica quarenta e oito páginas para trabalhar o tema, o que corresponde pouco mais de 16% de toda a obra.

Em seguida, são apresentados os descritores de cada uma das seis categorias, bem como das suas subcategorias, segundo a grelha de análise dos livros didático.

1. **Situações** – Esta é usada para introduzir, motivar. Pode ser da própria matemática como de outra ciência. Exercícios resolvidos, demonstrações.

Tarefas – Considera-se o que o autor propõe a ser feito.

- 1.1. Conhecimentos prévios: tarefas a rever os pré-requisitos como potência, funções, progressões geométricas, os racionais que se considerem necessárias.

## 1.2. Conhecimentos emergentes:

- a) Representação gráfica de funções com destreza.
- b) Cálculo algorítmico com destreza e aplicação das regras.
- c) Exploração (com ou sem calculadora) escolha de ferramenta mais adequada para a resolução, despertando interesse e desenvolver raciocínio, usando conhecimentos prévios.
- d) Aplicação de uma definição: Para compreender ou interpretar uma definição.
- e) Aplicação de uma propriedade: para interpretação e compreensão da mesma.
- f) Conjecturar e argumentar: destinado a prever um determinado resultado e apresentar um discurso lógico que o sustente.
- g) Prova: argumentação que justifique a validade de proposição ou um procedimento. A prática discursiva pode incluir elementos empíricos, indutivos, lógico-dedutivos,...
- h) Modelação de situações da vida real: contextualizada numa situação vivida pelo leitor. O estudante tem de descobrir a expressão algébrica que melhor modela a situação.

2. **Linguagem** – exemplo: numérica, verbal, algébrica, gráfica ou tabelar.

3. **Conceitos** – Introduzidos mediante uma definição: função exponencial, logaritmo e função logarítmica. Será feita a análise para constatar se há uma única definição e se esta é formal ou intuitiva.

4. **Proposições** – enunciados sobre conceitos tais como: propriedades das funções exponenciais e logarítmicas de base maior que um, domínio, contra-domínio, os zeros das funções, sinal, monotonia, continuidade assíntotas, paridade, regras operatórias, crescimento das funções exponenciais e logarítmicas.

Análise de como foram apresentadas as propriedades:

4.1 – Exposição é formal ou informal

4.2 – Provam, justificam ou só expõem

4.3 – Se se utilizam ou só se expõem sem mais referência

5. **Procedimentos** – os utilizados para resolver as atividades

Distinguimos:

5.1 – Vários procedimentos para se resolver as situações ou apenas um em cada caso.

5.2 – Os procedimentos utilizados são justificados ou só se expõem como método rotineiro.

5.3 – As novas tecnologias são utilizadas: calculadora, computador.

6. **Argumentação** - mostram utilidade no desenvolvimento.

6.1 – Utiliza prática discursiva para convencer o aluno da validade de determinadas propriedades ou proposições, baseada na linguagem natural, gráfica, algébrica, tabular...

6.2–Tipo de prova: empírica, dedutiva, lógico-dedutiva, contraexemplos, equivalências...

Na grade a seguir apresentamos uma síntese dos tópicos analisados e a contabilização de alguns deles.

Tabela 1: Grade de Análise.

Categorias	Subcategorias	Análise do livro didático		
1.Situações	1.1 Introdução/motivação	Apresenta situações da própria matemática, de outras ciências e da vida real.		
	1.2 Exemplos (tarefas resolvidas): <b>33</b>	Apresenta o conteúdo novo por meio de exemplos e exercícios resolvidos		
	1.3 Tarefas (que os autores Propõem ao estudante): <b>614</b>	Conhecimentos Prévios: <b>86</b>	Regras operatórias das potências: <b>86</b>	
		Conhecimentos Emergentes : <b>528</b>	1-Representação gráfica de funções	<b>10</b>
			2-Cálculo algorítmico	<b>236</b>
			3-Exploração	<b>3</b>
			4-Aplicação da definição	<b>74</b>
			5-Aplicação de uma propriedade	<b>135</b>
6-Conjeturar e argumentar			<b>43</b>	
7-Prova	<b>12</b>			
	8-Modelação matemática	<b>15</b>		
2.Linguagem	Linguagem natural, algébrica, numérica, gráfica, tabelar.			
3.Conceitos	Introduzidos por definição formal			
4.Proposições	4.1 Tipo de exposição.	Feita a partir das propriedades, de modo formal.		
	4.2 Prova ou não.	Prova, demonstra as regras		

		operatórias dos logaritmos. As propriedades restantes, só as expõem.
	4.3 As utilizam ou somente as expõem.	Utiliza as propriedades de função exponencial e de logarítmicas
5.Procedimentos	5.1 Utiliza diversas abordagens.	Utiliza apenas uma abordagem
	5.2 Justificam-se ou não.	Não, traz exercício resolvido como exemplo.
	5.3 Utiliza as novas tecnologias.	Não propõe o uso de computadores, mas aconselha o uso de calculadora científica para redução do trabalho algoritmo.
6.Argumentações	6.1 Utiliza uma prática discursiva para convencer da validade de determinadas propriedades, baseada na linguagem natural, gráfica,...	Para convencer sobre o uso das propriedades, traz exercícios de exemplo. Justifica.
	6.2 Tipo de prova usada.	Utiliza os métodos sintético ou analítico.

Para a introdução ao conceito de Função Exponencial, o livro apresenta uma situação de crescimento populacional e propõe situações e problematizações utilizando temas como ocorrência de terremoto, escala de acidez; e para introduzir o conceito de logaritmo os autores problematizam uma situação de desvalorização do preço de um caminhão, bem de consumo.

Desse modo, consideramos que o material apresenta situações que podem ser exploradas pelo professor, por meio de contextualizações interessantes ora relacionadas à História da Matemática, ora a situações de outras áreas do conhecimento, e também a situações das práticas sociais. No entanto, de forma explícita, o material chega a propor poucas questões de modelação, na verdade nenhuma de função logarítmica e 5 questões de função exponencial sendo que se desdobram em 13 alternativas para resolução. Na proposta de exercícios de resolução de problemas, estes apresentam a fórmula para se resolver apenas com a substituição da incógnita, questão do problema, não permitindo que o aluno o explore e investigue, apresentando de forma já fechada, as discussões a respeito.

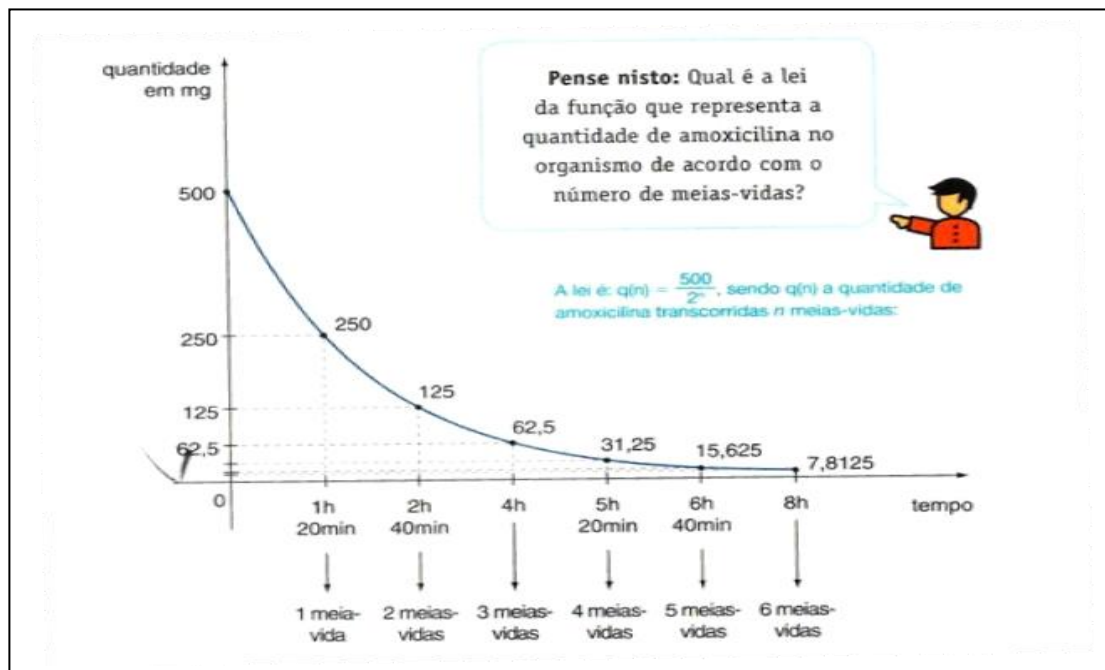


Figura 2 – Tarefa com ligações a outras ciências, mas permitindo a modelação por parte do aluno, pg.156.

Em contrapartida, nota-se grande ênfase conferida a tarefas de carácter procedimental. Contabilizamos 614 tarefas, sendo que a maioria delas são de cálculo algorítmico (236), seguidas por 135 tarefas de aplicação de uma propriedade e por 74 tarefas baseadas em definições.

<p>18. Sejam <math>a, b, c</math> reais positivos. Em cada caso, obtenha a expressão cujo desenvolvimento logarítmico, na respectiva base, é dado por:</p> <p>a) <math>\log a + \log b + \log c</math>  b) <math>3 \log_2 a + 2 \log_2 c - \log_2 b</math>  c) <math>\log_3 a - \log_3 b - 2</math>  d) <math>\frac{1}{2} \cdot \log a - \log b</math></p>	<p>16. Desenvolva, aplicando as propriedades operatórias dos logaritmos (suponha <math>a, b</math> e <math>c</math> reais positivos):</p> <p>a) <math>\log_5 \left( \frac{5a}{bc} \right)</math>    c) <math>\log_3 \left( \frac{ab^2}{c} \right)</math>    e) <math>\log_2 \sqrt{8a^2b^3}</math>  b) <math>\log \left( \frac{b^2}{10a} \right)</math>    d) <math>\log_2 \left( \frac{8a}{b^3c^2} \right)</math></p>	<p>2. Use a definição para calcular:</p> <p>a) <math>\log_2 \frac{1}{4}</math>    e) <math>\log_{36} \sqrt{6}</math>    i) <math>\log_{1,25} 0,64</math>  b) <math>\log_3 \sqrt{3}</math>    f) <math>\log 0,01</math>    j) <math>\log_{\frac{1}{3}} 0,6</math>  c) <math>\log_8 16</math>    g) <math>\log_9 \frac{1}{27}</math>  d) <math>\log_4 128</math>    h) <math>\log_{0,2} \sqrt[3]{25}</math></p>
Cálculo algorítmico: Pg.169	Aplicação de propriedade: Pg.168	Apoiada em definição: Pg.163

Figura 3 – Alguns exemplos de tarefas.

Contabilizamos 43 tarefas que envolvem conjecturas e argumentações, geralmente na linguagem materna, feitas oralmente e de modo geral inseridas nos exercícios de alternativas, como mostra o exemplo a seguir:


<p style="text-align: center;"><b>Pense nisto:</b> Por que esta definição não vale para <math>a = 0</math>?</p> <p>Se tivéssemos <math>a = 0</math>: <math>\forall n \in \mathbb{N}^*</math>, <math>0^n = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}</math>. impossível de ocorrer. Assim, não existe o inverso de 0.</p> 	<p><b>36.</b> Seja <math>f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}</math> definida por <math>f(x) = \log x</math>. Classifique como V ou F as afirmações seguintes, corrigindo as falsas:</p> <p>a) <math>f(100) = 2</math></p> <p>b) <math>f(x^2) = 2 \cdot f(x)</math></p> <p>c) <math>f(10x) = 10 \cdot f(x)</math></p> <p>d) <math>f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = 0</math></p> <p>e) A taxa média de variação da função, quando <math>x</math> varia de 1 a 10, é dez vezes a taxa de variação da função quando <math>x</math> varia de 10 a 100.</p>
Cálculo algorítmico: Pg.137	Aplicação de propriedade: Pg.179

Figura 4 – Exemplos de algumas tarefas envolvendo conjecturas e argumentações.

Em relação à apresentação de tarefas que permitam ao professor explorar conhecimentos prévios dos estudantes, observa-se que essa preocupação só se expressa em termos de revisão de operações com potenciação e suas propriedades, perfazendo um total de 86 tarefas com este objetivo. No tocante a demonstrações os autores o fazem para as propriedades operatórias dos logaritmos.

Destacamos que há um número restrito de 12 tarefas em que se faz uso de representações gráficas e sempre são apresentadas com caráter de exposição do que de investigação pelos estudantes.

O uso da calculadora científica é sugerido como facilitador dos cálculos de potências com expoentes racionais e irracionais, e a existência da tecla  $e$ , e sua importância para o cálculo infinitesimal e seu inverso  $\ln$ , logaritmo neperiano.

As calculadoras científicas auxiliam no cálculo de potências, que pode ser bastante trabalhoso.

Observe a tecla  $y^x$  em que  $y$  representa a base da potência, e  $x$ , seu expoente.

Para calcular  $1,3^5$ , pressionamos:

1 . 3 →  $y^x$  → 5 → = → 3,71293

Obtemos 3,71293

Figura 5 – Exemplo p. 136.



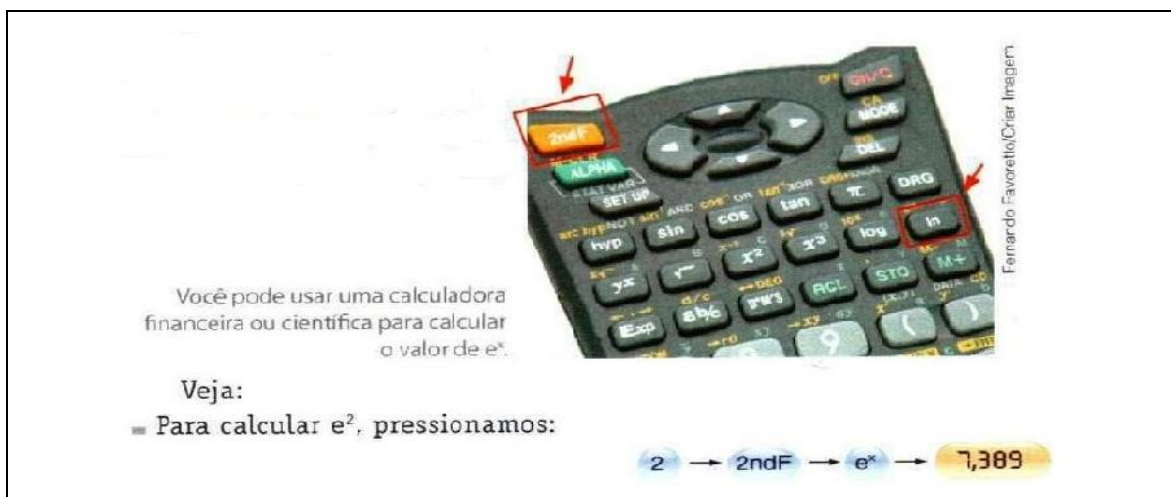


Figura 6 – Exemplo p. 146.

## Considerações finais

Nossas observações confirmam, em parte, análises do PNLD de 2015, a obra obedece a um padrão: as noções a serem trabalhadas são apresentadas com exemplos ou com atividades, seguidas de uma sistematização teórica e de novos exemplos e de exercícios resolvidos e outros propostos.

No entanto, a análise do PNLD não revela de modo tão explícito essa concentração de procedimentos mecânicos, que restringe a possibilidade de o aluno participar de modo mais autônomo e crítico no processo de aprendizagem, não estando portanto em sintonia com as prescrições curriculares que também enfatizam a resolução de problemas.

A partir da análise realizada da primeira coleção em termos de situações matemáticas, conceitos, proposições, procedimentos, linguagem e argumentações e a contabilização de diferentes tipos de tarefas, podemos levantar a hipótese de que os manuais escolares ainda não conseguem oferecer tipos diferenciados de tarefas, de forma a possibilitar a formação dos estudantes do Ensino Médio. Esta hipótese poderá ser confirmada, ou não, com as demais análises que serão realizadas no âmbito do projeto.

Por outro lado, sabemos da grande influência que esses materiais representam para o trabalho dos professores, que remete à importância de se lançar um olhar mais profundo sobre eles.

## Referências

BRASIL. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.

Guia de livros didáticos: PNLD 2015: matemática: ensino médio. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/index.php>. Acesso em 10/02/2015.

REMILLARD, J. T; HERBEL-EISENMANN, B. A.; LLOYD, G. M.; (Ed.), **Mathematics Teachers at Work: Connecting curriculum materials and classroom instruction**. New York: Taylor & Francis, 2009.

PIRES, C.M.C. e Curi, E.. Relações entre professores que ensinam matemática e prescrições curriculares. REnCiMa, v.4, n.2, p. 57-74, 2013.