

# O SINAL DE IGUALDADE E SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS: BUSCANDO RUPTURAS NA TRANSIÇÃO ENTRE OS ENSINOS FUNDAMENTAL I E II

## THE EQUAL SIGN AND ITS DIFFERENT MEANINGS: SEEKING RUPTURES IN THE TRANSITION FROM PRIMARY AND ELEMENTARY SCHOOL

**Thaís Helena Inglês Silva**

Universidade Federal do ABC (UFABC), [thaisinglez@gmail.com](mailto:thaisinglez@gmail.com)

**Alessandro Jacques Ribeiro**

Universidade Federal do ABC (UFABC), [alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br](mailto:alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br)

### Resumo

A transição entre os ensinos Fundamental I e II tem sido tema de diversos estudos na área da educação e muitos aspectos pedagógicos e psicológicos são elencados como razões para as *rupturas* que há nesta transição. Afora isso, considerando-se especificamente a matemática, há indícios da existência de aspectos particulares desta disciplina que intensifiquem tais rupturas. Com o intuito de identificar tais aspectos dessa ruptura, tomamos o sinal de igualdade como um conceito chave, tanto para o Ensino Fundamental I quanto para o II e assumimos a conjectura de que a *ressignificação de conceitos* pode contribuir com o distanciamento entre os dois momentos. Nesse sentido, nossa pesquisa teve por objetivo analisar como o sinal de igualdade é abordado em duas coleções de livros didáticos dos anos finais do EFI e dos anos iniciais do EFII. Desta análise percebeu-se a descontinuidade de linguagem e de significados atribuídos ao sinal de igualdade nas duas coleções, sendo estes fatores que certamente contribuem para as dificuldades na transição entre os ensinos fundamental I e II.

**Palavras-chave:** Sinal de Igualdade. Livros Didáticos. Educação Algébrica. Ensino Fundamental.

### Abstract

The transition between elementary and secondary school has been the subject of several studies in education and many educational and psychological aspects are listed as reasons for ruptures there are in this transition. Apart from that, considering specifically mathematics, there are indications of particular aspects of this discipline to intensify such disruptions. In order to identify aspects of this rupture we took the equal sign as a key concept for both elementary and secondary school and we assumed the conjecture that the resignification of concepts can contribute to the distancing between both moments. In this sense, our research aimed to analyze how the equal sign has been discussed in two

collections of textbooks for the final years of elementary and initial years secondary school. From this analysis we realized the discontinuity of language and meanings attributed to the equal sign in both collections, which are surely contribute to the difficulties in the transition between these two levels of basic education.

**Key-words:** Equal sign. Textbooks. Educational Algebra. Elementary and Secondary School.

## Introdução

A transição dos anos finais do Ensino Fundamental I (EFI) para os anos iniciais do Ensino Fundamental II (EFII) – transição que compreende o término do Ciclo 2, a saber, 4º e 5º anos<sup>1</sup> e início do Ciclo 3, formado por 6º e 7º anos – tem sido objeto de pesquisa de muitos educadores e psicólogos, e tema de investigação de dissertações e teses nos últimos 30 anos. Segundo Hauser (2007), entre 1987 e 2004, quatorze dissertações e uma tese foram defendidas em programas de pós-graduação no Brasil tratando-se especificamente da *transição, passagem* ou *ruptura* entre as duas etapas do Ensino Fundamental. Somam-se a estes publicações, artigos em periódicos de pedagogia e psicologia, bem como trabalhos em congressos, os quais se debruçam sobre esta temática, como alguns que discutiremos a seguir, em nossa revisão de literatura.

Entre as pesquisas que investigaram este delicado momento, em uma perspectiva pedagógica, destacamos as de Domingues (1985), Dias da Silva (1997) e Silva (1999), as quais buscaram identificar as características de cada etapa de ensino a fim de destacar semelhanças e diferenças que justifiquem as dificuldades encontradas nessa transição. Dentre seus apontamentos destacamos: 1) o desconhecimento dos professores do EFI dos conteúdos que serão trabalhados no EFII, 2) o desconhecimento dos professores do EFII do trabalho realizado no EFI e 3) a inexistência de marcos desta transição, ou seja, de estratégias que deixem claros tanto os diferentes papéis dos alunos em cada etapa da escolaridade, como os diferentes interesses escolares e disciplinares.

Especificamente na matemática, por outro lado, pouco se discute sobre esta transição, embora seja frequentemente apontado por professores que é a partir do 6º ano que os alunos deixam de gostar da disciplina e passam a apresentar maiores dificuldades. Um resultado que corrobora estes apontamentos pode ser encontrado no trabalho de Brito (1996), o qual evidencia a existência de *atitudes negativas* dos alunos em relação à matemática ao longo do EFII, as quais não existiam ou não eram predominantes no EFI. Ao comparar os anos finais deste aos iniciais daquele, isto se evidencia ainda mais, pois

Os estudantes com atitudes mais positivas estão na terceira e quarta séries. A média cai abruptamente para os de quinta e sexta séries e

---

<sup>1</sup> A menos das citações que trazem a nomenclatura antiga, em nosso texto, adotaremos a nomenclatura atual vigente para nos referirmos aos anos (1º ao 9º) do Ensino Fundamental.

continua descendente na sétima e oitava séries, onde atinge seu ponto mais baixo. (BRITO, 1996, p. 295)

É comum dizer que esta passagem de uma etapa a outra de ensino é marcada por *rupturas*. Se, por um lado, tais rupturas decorrem da própria configuração escolar – professores especialistas de matemática substituindo o professor polivalente, novos modelos de avaliação, nova dinâmica de aulas e didática, entre outros – por outro lado, dada a rejeição à matemática a partir do terceiro ciclo, pode-se supor que existam fatores inerentes à própria disciplina que também dificultem a transição.

Uma evidência da existência de fatores disciplinares que contribuem para as *rupturas* nesta transição são os trabalhos de Lucchesi e Ferreira (2009) e de Cainelli (2011) que, respectivamente, apresentam características das disciplinas de Educação Física e História que se modificam e ampliam as diferenças entre o EFI e o EFII. Outro aspecto a se considerar é a própria atuação do professor que leciona matemática, uma vez que o EFII é formado por professores especialistas, com formações imbuídas com as características desta disciplina. Temos evidências disto no trabalho de Araújo (2003) que, a partir de um estudo de caso com duas professoras, uma do 5º e outra do 6º ano, identificou diferenças entre o que elas julgavam mais relevante na aprendizagem dos alunos. Observou-se, predominante nas avaliações elaboradas pela professora do 5º ano, a “*valorização dos procedimentos utilizados pelos alunos como expressão do pensamento e em suas justificativas sobre como pensaram para resolver as situações*” (p. 110). Por outro lado, no que se refere à professora do 6º ano

a relevância parece estar associada ao domínio dos algoritmos, aos cálculos propriamente ditos, (...) relativo à obtenção de pré-requisitos, como, técnicas, conhecimentos e metodologias, elementos necessários à continuidade do estudo da Matemática. (ARAÚJO, 2003, p. 110).

Assim, entendemos que, além de questões pedagógicas e psicológicas que envolvem esta etapa de transição, há fatores particulares da própria matemática que reforçam ou justificam as suas rupturas. Contudo, nos parece faltarem pesquisas que sinalizem nesta direção e que identifiquem tais fatores. Neste sentido, o presente estudo pretende contribuir com tais questões, investigando, primeiramente, se há, dentro da matemática, diferentes objetivos previstos para os EFI e EFII e como eles se manifestam nos conteúdos selecionados em cada etapa de ensino. Além disso, tomamos como conjectura que uma das características da matemática que contribui para as *rupturas* na transição do EFI para o EFII é a *ressignificação de conceitos*<sup>2</sup> que, apesar de prevista no currículo e desejada para o avanço matemático, como discutiremos a seguir, pode ser uma barreira para a aprendizagem destes conceitos, dependendo da forma como for trabalhada normalmente nas escolas.

---

<sup>2</sup> Por *ressignificação de conceitos* entendemos, não a substituição de significados atribuídos a conceitos matemáticos, mas uma ampliação das maneiras de conceber tais conteúdos, muitas vezes polissêmicos. Há, nesta ideia, uma aproximação da Teoria de Perfis Conceituais de Eduardo Mortimer (MORTIMER, 1994).

A fim de investigar esta problemática, desenvolveu-se uma pesquisa de Iniciação Científica<sup>3</sup>, financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), que teve por objetivo identificar aspectos inerentes à matemática que contribuem para as *rupturas* na transição entre os EFI e EFII.

Como ponto de partida, fez-se um estudo dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental – documento organizado em dois volumes, sendo um destinado aos Ciclos 1 e 2 (EFI) e outro aos Ciclos 3 e 4 (EFII) – com a finalidade de identificar divergências entre os objetivos e objetos matemáticos considerados fundamentais em cada etapa de ensino. Posteriormente, com a finalidade de investigar nossa conjectura preliminar acerca do papel da ressignificação dos conceitos matemáticos, foram escolhidas duas coleções de livros didáticos para buscar compreender como um dos objetos matemáticos identificado como relevante nas duas etapas de ensino, quer seja, o sinal de igualdade, era abordado em ambas as coleções.

Apresentaremos, nas seções que se seguem, considerações sobre o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apontam como características da disciplina de matemática nas etapas de nosso interesse, bem como o papel do sinal de igualdade e os significados que ele adquire na educação matemática. Por fim, discutimos se e como a ressignificação deste conceito é abordada nas obras por nós analisadas, visando identificar se e porque isso figura e se configura como ruptura na passagem do EFI para o EFII.

## **A Matemática e os Parâmetros Curriculares Nacionais**

Por considerarmos que as especificidades de cada disciplina passam a nortear as atividades escolares desenvolvidas, mais intensamente a partir do EFII, julgamos importante compreender o que os documentos oficiais, no caso os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), destacam como objetivos no/para o ensino de matemática nas duas etapas do Ensino Fundamental, a fim de compará-las nestes aspectos. Um dos importantes resultados observados na análise destes documentos é que a ruptura entre os anos iniciais e os anos finais do Ensino Fundamental é explicitamente reconhecida. Ao apresentar a proposta da divisão dos anos escolares em ciclos, os autores do documento já reconhecem que tal proposta

(...) não une as quarta e quinta séries para eliminar a ruptura desastrosa que aí se dá e tem causado muita repetência e evasão, como também não define uma etapa maior para o início da escolaridade, que deveria (a exemplo da imensa maioria dos países) incorporar à escolaridade obrigatória as crianças desde os seis anos. (BRASIL, 1997, p. 44, grifo nosso)

---

<sup>3</sup> A presente pesquisa está vinculada a um projeto mais amplo, financiado pelo CNPq, no edital “Ciências Humanas e Sociais” (405480/2012-1), cujo título é “Conhecimentos Algébricos e o Ensino de Equação: investigando a prática de professores da Educação Básica”.

Conforme citado anteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental organizam-se em dois documentos, um destinado aos ciclos que compreendem o EFI (BRASIL, 1997) e outro, aos ciclos que compreendem o EFII (BRASIL, 1998). Na primeira etapa desta investigação, fizemos a leitura e a análise dos dois documentos, buscando identificar em que eles diferem, não quanto aos objetivos gerais de ensino, mas especificamente, com relação aos objetivos matemáticos. Ambos os documentos estruturam-se em duas partes: a primeira, comum, constituída por uma apresentação da área da matemática e de seus objetivos de ensino e aprendizagem no Ensino Fundamental e a segunda, destinada especificamente às orientações para cada ciclo.

A parte comum de ambos os documentos (PCN do EFI e do EFII) apresenta pequenas alterações na versão para o EFII, que foi publicado no ano seguinte à do EFI. Quanto à segunda parte, que se constitui pelos os objetivos particulares ano a ano, é importante destacar que, para todos os ciclos, aparecem termos como “ampliar e construir novos significados” para diversos conceitos matemáticos, como números, operações, formas geométricas, entre outros. Isso nos indica uma evidente necessidade de que os conceitos matemáticos sejam ressignificados ao longo dos anos escolares, tendo em vista que os próprios documentos oficiais preveem a construção de novos significados, sendo isso desejável nos processos de ensino e de aprendizagem de matemática.

O termo “ampliar e construir novos significados” aparece com maior frequência no documento dos Ciclos 1 e 2. Neste documento, a matemática é quase que exclusivamente tratada em sua totalidade, não sendo subdividida em áreas. Há grande ênfase nos conteúdos que envolvem números e operações e, quanto à aprendizagem, na compreensão da matemática no cotidiano e nos significados que os conceitos podem adquirir para os alunos. Por outro lado, no documento dos Ciclos 3 e 4, os objetivos de cada ano já aparecem listados a partir da divisão da matemática em três grandes áreas (números, álgebra e geometria) e parecem voltar-se mais para os próprios conteúdos do que aos seus significados. Além disso, também observamos que os conteúdos matemáticos parecem apresentar-se de maneira menos aplicável ao cotidiano e ao contexto do aluno.

Além dos objetivos matemáticos, há também uma lista de atitudes e procedimentos a serem desenvolvidos em cada um dos ciclos. Nos dois primeiros ciclos são enfatizadas a curiosidade e a confiança, para que o aluno aprenda sempre novos conceitos e sinta-se seguro em usá-los, aplicá-los ou operá-los. Nos dois últimos ciclos, a ênfase é dada no aprofundamento de conceitos e na aplicabilidade destes, valorizando o trabalho em grupo e o uso de novas tecnologias, como as tecnologias da informação.

De certa forma, na medida em que, com relação às atitudes, os alunos devem ser cada vez mais aptos a aplicar aquilo que aprendem na escola com relação aos objetivos matemáticos, verifica-se menor valorização da ampliação e aprofundamento de significados e aplicações práticas com o passar dos anos. Identificamos aqui uma *ruptura* entre os objetivos matemáticos e os educacionais, o que parece ampliar as “distâncias” entre os primeiros e os últimos anos do Ensino Fundamental.

Devido a isso, parece-nos que a resignificação de conceitos deixa de ser considerada uma importante etapa na aprendizagem de matemática e, portanto, possivelmente também deixa de ser feita, colaborando com a ampliação das rupturas entre uma etapa e outra do Ensino Fundamental. Essa diferença de objetivos em cada documento vai ao encontro do que Araújo (2003) apontou em sua pesquisa, no que se refere ao que as professoras entrevistadas consideravam mais relevantes para o ensino de matemática em cada uma das etapas de escolarização no Ensino Fundamental.

Destacamos que é perfeitamente aceitável que os objetivos de cada ciclo difiram entre si, uma vez que os alunos avançam a cada ano no aprendizado de matemática, mas que, por estes objetivos muitas vezes não estarem claros, figuram como motivos para as rupturas na transição do EFI para o EFII – o que Dias da Silva (1997) chamou de *passagem sem rito*.

Ainda no que se refere à análise dos PCN, fizemos um levantamento do que chamamos de *conceitos-chave da matemática*, a saber, aqueles que aparecem com maior frequência ou ênfase tanto no documento do EFI quanto no do EFII. Nesse sentido, encontramos o conceito de número, de igualdade e de proporcionalidade.

Com isso, tomamos o conceito de igualdade para a continuidade à nossa pesquisa, por entendermos que tal conceito é de vital importância para o desenvolvimento da Álgebra – propriamente dita – nos anos finais do EF. Como discutido anteriormente, nossa proposta é analisar como diferentes significados do sinal de igualdade aparecem em coleções de livros didáticos destinados ao EFI e ao EFII, no que se refere a sua resignificação. A existência e a importância de diferentes significados para o sinal de igualdade é apontada na literatura, e será apresentada a seguir.

Outra razão para esta escolha fundamenta-se em um dos significados do sinal de igualdade – o de equivalência – o qual é fundamental para o desenvolvimento do conceito de equação, conceito central na álgebra do Ensino Fundamental II. Se, portanto, o significado de equivalência não for construído pelos estudantes e, assim, o conceito de igualdade não for resignificado na transição do EFI para o EFII, identifica-se uma razão de caráter disciplinar matemático para que esta passagem seja dificultada.

## **O sinal de igualdade e seus significados**

Em um artigo publicado em 1981, Kieran identifica três significados que o sinal de igualdade assume na matemática escolar: os significados relacional, operacional e de equivalência<sup>4</sup>. Neste trabalho, Kieran aponta que o significado operacional aparece primeiro na educação escolar e predomina sobre o significado de equivalência, sendo que, muitas vezes, este último não é compreendido pelos estudantes ao longo de todo o Ensino Fundamental.

---

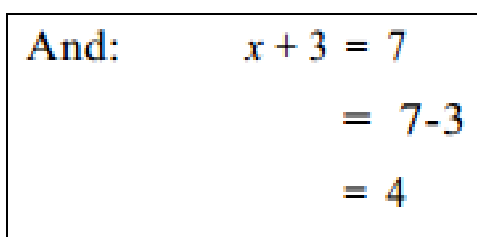
<sup>4</sup> Em Kieran (1981) são discutidos três significados para o sinal de igualdade, como apontado no texto. Entretanto, em nossa pesquisa, faremos referência e discutiremos somente dois deles, a saber: o “operacional” e o de “equivalência”

Kieran (1981) argumenta que, matematicamente falando, o sinal de igualdade sempre indica uma equivalência, mas que dentro da matemática escolar, dada a maneira como as operações aritméticas são introduzidas e trabalhadas nas escolas primárias – o equivalente ao nosso EFI – o significado operacional é desenvolvido e prevalece nos anos iniciais. Um exemplo são os exercícios da forma  $3 + 4 = \square$ , nos quais o sinal de igualdade indica, aos olhos dos alunos, a necessidade de se realizar uma operação. Mesmo no EFII, com a presença do conceito de equação, a autora salienta que quando este é introduzido apenas com equações consideradas triviais – aquelas com a incógnita em apenas um dos membros da equação – o aluno não precisa desenvolver o significado de equivalência para obter a solução, que pode ser facilmente entendida como algum número que opera com outros para obter um resultado específico.

Mesmo quando os alunos conseguem resolver equações, a autora argumenta que é possível perceber resquícios do significado operacional quando, por exemplo, os alunos usam o sinal de igualdade como um conector entre as passagens, deixando de escrever a equivalência e passando apenas a reescrever o membro da equação que foi alterado de uma passagem para a outra. Neste caso, mesmo conseguindo resolver a equação, os alunos não compreendem, de fato, o que estão fazendo.

Assim sendo, tomando-se por base as discussões apresentadas em Kieran (1981), podemos concluir que atividades que contemplem o sinal de igualdade como uma orientação do tipo “faça alguma coisa” ou “resolva esta operação” contribuem para a construção do significado operacional. Além disso, a introdução e o desenvolvimento do conceito de equação apenas por meio de exemplos triviais, não possibilita a efetiva construção do significado de equivalência. Contudo, Kieran (1981) ainda destaca que, para que este significado seja construído, a introdução de equações triviais, onde o “número desconhecido” aparece tampado por um dedo ou substituído por uma figura, é essencial.

As figuras 1 e 2 a seguir foram extraídas do artigo de 1981 e ilustram as discussões acima apresentadas.



<b>And:</b>	$x + 3 = 7$
	$= 7 - 3$
	$= 4$

Figura 1 - Exemplo do uso do sinal de igualdade como conector entre as operações realizadas em cada passagem.

Fonte: (KIERAN, 1981, p. 323)

$$7 \times 2 - 3 = 5 \times 2 + 1$$

and hiding any one of the numbers. The hiding was done at first by a finger:

$$7 \times \cancel{2} - 3 = 5 \times 2 + 1,$$

then by a box:

$$7 \times \boxed{0} - 3 = 5 \times 2 + 1,$$

and finally by a letter:

$$7 \times a - 3 = 5 \times 2 + 1.$$

Figura 2 - Sugestão de estratégias para a introdução de igualdades com valores desconhecidos.

Fonte: (KIERAN, 1981, p.322).

Estudos semelhantes ao de Kieran foram realizados no Brasil (BANDARRA, 2011), identificando também que o significado operacional prevalece sobre o de equivalência. Além disso, o estudo de Bandarra indica que aqueles alunos que demonstraram dominar tanto o significado operacional quanto o de equivalência tinham em comum o fato de terem, ao longo de sua vida escolar, sido incentivados a comunicar suas estratégias de resolução de problemas oralmente ou por escrito e já haviam tido contato com problemas relacionados ao significado de equivalência antes daquele estudo.

Do ponto de vista dos professores, o trabalho desenvolvido na dissertação de mestrado de Linéia Trivilin (TRIVILIN, 2013) pode nos fornecer evidências que a dificuldade em compreender e utilizar situações matemáticas que favoreçam o desenvolvimento dos diferentes significados do sinal de igualdade precisa ser discutida na formação de professores. Em artigo elaborado pela autora e seu orientador (TRIVILIN; RIBEIRO, 2015) são apresentados os principais resultados da pesquisa que eles desenvolveram, resultados estes que nos indicam a dificuldade dos professores dos anos iniciais participantes da referida pesquisa em reconhecer os significados de equivalência e relacional, no sentido apresentado por Kieran (1981). Os professores afirmaram desconhecer – ou ao menos, tomar consciência – de que o sinal de igualdade poderia assumir outro significado a não ser aquele do tipo “faça a operação”, ou seja, o significado operacional.

Desta forma, concluímos que a resignificação do sinal de igualdade marca a introdução da álgebra nos anos finais do ensino fundamental I, além de ampliar o domínio das noções aritméticas e da compreensão do conceito de equivalência, que será importante em outros momentos, como no estudo de frações e de geometria. Desta maneira, se os significados do sinal de igualdade não são ampliados, parece-nos que a aprendizagem em matemática, especialmente nos conteúdos e conceitos trabalhados no EFII, pode ficar fortemente prejudicada. Sendo assim, investigar como esse objeto matemático é abordado e se é possibilitada a resignificação desse conceito, em particular na transição do EFI para o EFII, pode nos ajudar a identificar possíveis razões de cunho matemático para as rupturas da referida transição.



Tomando por base o trabalho de Kieran (1981) e as discussões apresentadas nas secções anteriores, passamos a analisar duas coleções de livros didáticos, cada qual destinada a uma das etapas do Ensino Fundamental, a fim de verificar se e como os significados operacional e de equivalência podem ser nelas encontrados. Na próxima seção discutiremos aspectos metodológicos de nossa pesquisa, principalmente no que se refere à escolha dos livros e à análise dos mesmos.

### **Nossas análises: investigando as coleções de livros didáticos**

Optamos por investigar livros didáticos, pois, muitas vezes, estes são orientadores da prática dos professores, direcionando quais conteúdos devem ser trabalhados e de que forma (DANTE, 1996), (FREITAS, RODRIGUES, 2008). Os próprios PCN por nós analisados indicam que, muitas vezes, “*os professores apoiam-se quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória.*”. (BRASIL, 1998, p. 22).

Para assegurar-nos que os livros analisados não recaíam neste problema, quer seja, a “qualidade insatisfatória”, as coleções que selecionamos foram recomendadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), dos anos de 2010 e 2011. Em um primeiro momento, buscamos escolher uma única coleção que contemplasse todos os anos dos Ciclos 2 e 3, entretanto, nenhuma das coleções indicadas pelo PNLD dos supracitados anos satisfazia esta condição. O segundo critério de seleção foi buscar coleções que compartilhassem ao menos um de seus autores, o que garantiria, em nossa visão, alguma continuidade entre as obras analisadas. Foram selecionadas desta forma, as coleções “*Aprendendo Sempre*” (EFI) e “*Tudo é Matemática*” (EFII), ambas de Luiz Roberto Dante. No entanto, como um novo PNLD para as obras de EFI foi lançado em 2013, não conseguimos ter acesso à coleção “*Aprendendo Sempre*” nas escolas e bibliotecas visitadas. Selecionamos, assim, a coleção “*Matemática do Cotidiano & suas Conexões*”, de Antonio José Lopes Bigode e Joaquim Gimenez, a qual era bem conceituada no PNLD de 2010 para as séries finais do Ensino Fundamental I e encontrava-se disponível naquele momento.

A análise dos livros foi feita prioritariamente a partir dos exercícios propostos, mas consultamos também algumas exposições teóricas. Não foi selecionado algum capítulo ou parte pontual dos livros, sendo que os exercícios por eles propostos foram considerados sempre que aparecia – ou deixava de aparecer, como discutiremos a seguir – o sinal de igualdade de alguma forma. Assim, buscamos apreender como o sinal de igualdade foi considerado no conjunto da obra, além de investigarmos se as abordagens adotadas propiciavam reconhecer mudanças de significado na “função” deste sinal nas diferentes atividades propostas.

Identificamos nas obras da coleção do EFI, desde os livros do 4º ano, a valorização da ideia de *número desconhecido*. Embora as atividades, como a apresentada na Figura 3, tenham a finalidade de aplicar conhecimentos operacionais e o sinal de igualdade permaneça com o significado de operador, notamos que a introdução da ideia *número desconhecido* tampando um dos números em uma igualdade é o primeiro passo, como

apresentado por Kieran (1981), para a construção do conceito de equação. Consideramos que este tipo de atividade potencializa o desenvolvimento da álgebra nos anos posteriores do Ensino Fundamental.

8 Qual será o número escondido embaixo do dedo?

a)  $1\ 000 - \text{dedo} = 900$       c)  $880 - \text{dedo} = 877$

b)  $900 - \text{dedo} = 880$       d)  $1\ 000 - \text{dedo} = 877$

Explique como você pensou para chegar às respostas.

Figura 3 - Exercícios onde temos "partes da conta faltando" aparecem nas obras desde o 3º ano e, embora não tenham o interesse de desenvolver conceitos algébricos, dão início a um processo de abstração muito necessário para minimizar a ruptura entre o EFI e o EFII.

Fonte: Coleção Matemática do Cotidiano & suas Conexões, livro do 4º ano, p. 64.

Acreditamos que a coleção do EFI, ao se preocupar com situações como esta da Figura 3, ou situações similares, parece promover possibilidades de raciocínios que facilitam a ressignificação do sinal de igualdade, como, por exemplo, o *pensamento relacional*<sup>5</sup>. Em outros exercícios dos livros dos 4º e 5º anos, muitas vezes o *valor desconhecido* é representado por um quadradinho vazio ou colorido, que pode aparecer no primeiro ou no segundo membro da igualdade, contribuindo, em nosso entendimento, para a discussão de temas ligados à álgebra da educação básica, como o conceito de incógnita.

Além da ideia de *número desconhecido*, percebemos que a coleção do EFI privilegia situações-problema e contextualizadas e, quando aparecem exercícios que pedem que os alunos calculem, principalmente a respeito das quatro operações, como o mostrado na Figura 4, estes geralmente não são seguidos pelo sinal de igualdade.

8 Calcule o resultado. Lembre-se: primeiro faça as multiplicações, depois, as adições:

a)  $3 \times 8 + 4 \times 7$       e)  $8 \times 8 + 6 \times 6$

b)  $5 \times 9 + 7 \times 5$       f)  $3 \times 11 + 7 \times 9$

c)  $3 \times 7 + 3 \times 13$       g)  $4 \times 12 + 5 \times 16$

d)  $7 \times 8 + 3 \times 8$       h)  $2 \times 27 + 4 \times 13$

Figura 4 - Os exercícios de "calcule" ou "resolva", quando aparecem, não são seguidos do sinal de igualdade.

Fonte: Coleção Matemática do Cotidiano & suas Conexões, livro do 4º ano, p. 36.

<sup>5</sup> O pensamento relacional, sinteticamente, consiste em desenvolver relações de equivalência entre as operações numéricas. Para maiores informações sobre pensamento relacional, veja (STEPHENS, 2007) e (STEPHENS, RIBEIRO, 2012).

O fato de o sinal de igualdade não aparecer em exercícios deste tipo, em nosso entendimento, contribui para não reforçar o significado do mesmo como um operador. Se, no primeiro item, estivesse escrito “ $3 \times 8 + 4 \times 7 =$ ”, o sinal de igualdade ficaria claramente associado à necessidade de resolver as operações, o que frequentemente acontece nos livros didáticos e é apontado como uma falha por Ginsburg (1977, *apud* CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C., 2007).

Mesmo tendo apresentado dois aspectos facilitadores à construção do significado de equivalência na coleção do EFI, não percebemos, no entanto, em nenhum dos exercícios ou das explicações teóricas analisadas, a presença deste significado nos livros dos 4º e 5º anos. Mesmo quando, no livro do 5º ano, são introduzidas as frações, não é trabalhado o conceito de equivalência entre elas, e o sinal de igualdade só aparece quando somam-se frações de mesmo denominador. Salientamos por outro lado, que, de fato, estas discussões não são previstas para o EFI.

Ao investigarmos a coleção do EFII, notamos uma significativa mudança no papel do sinal de igualdade, uma vez que, logo nas primeiras páginas da obra do 6º ano, são apresentadas fórmulas de áreas de figuras planas. A compreensão das fórmulas requer um grande salto conceitual, pois além de usarem o sinal de igualdade em seu significado de equivalência, também trazem letras representando os parâmetros desta fórmula que, em alguns casos, tornam-se variáveis. A ideia de variável geralmente não é apresentada no EFI e, na coleção investigada, é introduzida diretamente apenas no livro do 7º ano, ainda que já seja, implicitamente, utilizada desde o início do livro do 6º ano.

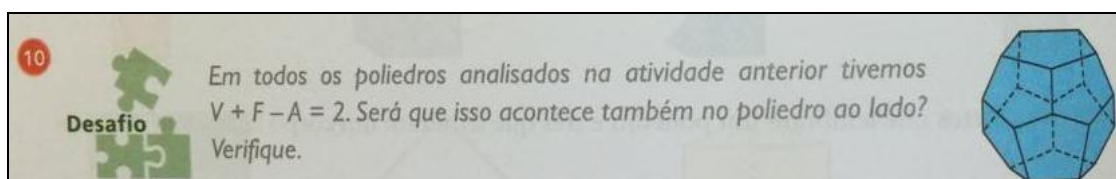


Figura 5 - Exemplo de fórmulas que aparecem na coleção do EFII, antes mesmo da introdução e formalização do conceito de variável e de incógnita.

Fonte: Coleção “Tudo é Matemática”, livro do 6º ano, p. 86.

Consideramos que, embora a coleção do EFI tenha trabalhado com os primeiros passos de abstração propostos por Kieran (1981) – p.e. tampar com o dedo um dos valores e substituí-lo por uma figura – ao se introduzir as letras sem fazer menção de que estas estão substituindo os elementos de figuras, como as apresentadas na situação acima, pode prejudicar a transição de linguagem, uma vez que, é somente no livro do 7º ano que as “letras” são vistas com maior detalhamento, ao se estudar equações. O estudo de fórmulas e, principalmente, a chegada às equações não faz sentido se o sinal de igual continuar a ser compreendido exclusivamente como operador.

Ainda no que se refere à transição de linguagem, notamos que a coleção o EFII prioriza termos formais da matemática que, muitas vezes, são introduzidos como se já fossem conhecidos pelos estudantes. No entanto, pode acontecer de os estudantes ainda não terem conhecimento de tais termos, pois, como vemos na coleção do EFI, termos como *incógnita* não são usados, sendo substituídos por *número escondido*, *valor da*



## Algumas conclusões e considerações

Neste trabalho procuramos, em primeiro lugar, compreender se há fatores inerentes à matemática que contribuem para as rupturas encontradas na transição do EFI para o EFII, além dos fatores pedagógicos e psicológicos já tão conhecidos na literatura. Identificamos que, enquanto os objetivos pedagógicos sinalizam cada vez mais a aplicação dos conceitos no cotidiano, os objetivos matemáticos de cada ciclo seguem o caminho contrário, pois os conteúdos matemáticos se distanciam cada vez mais da “realidade”. Com isso, ratificamos a necessidade dos próprios conteúdos matemáticos requererem uma ressignificação, prevista nos documentos oficiais, mas que nem sempre acontece nas salas de aula.

Identificamos a *igualdade* como um *conceito-chave* na matemática, sendo que o sinal de igualdade possui dois significados diferentes e necessários em cada etapa da educação básica, e buscamos verificar se é favorecida a ressignificação deste conceito a partir de duas coleções de livros didáticos. Voltamo-nos para os livros didáticos, pois estes têm um relevante papel como norteadores da prática do professor. Tal premissa nos levou a conjecturar se poderíamos neles – os livros didáticos – encontrar esforços/oportunidades para a construção do significado de *equivalência* do sinal de igualdade, uma vez que a literatura aponta para o trabalho com o significado de operador, desde os anos iniciais da escolarização.

No caso das obras investigadas, ainda que a coleção do EFI promova formas de raciocínio que minimizem o significado operacional do sinal de igualdade, não percebemos, na coleção do EFII, nenhum tipo de continuidade a estes raciocínios. Pelo contrário, a coleção se inicia já tomando o significado de equivalência para o sinal de igualdade como conhecido, deixando a cargo do aluno a mudança ou a ampliação destes significados, na passagem do EFI para o EFII.

Neste sentido identificamos, como buscávamos compreender, uma *ruptura* de ordem matemática, uma vez que, assumindo o significado de equivalência como já conhecido, os alunos podem não construir relações entre este significado e o operacional, carregando dificuldades ao, futuramente, estudar as equações, por exemplo. Acreditamos que, assim como a ressignificação do sinal de igualdade não é promovida nos livros didáticos, outros conceitos matemáticos importantes, como o de número e de proporcionalidade, que também foram identificados como *conceitos-chave* nos PCN, possam não estar sendo ressignificados. Ratificamos nossa conjectura de que a ressignificação de conceitos matemáticos – verificada para o sinal de igualdade – pode figurar uma *ruptura* na transição do EFI para o EFII.

Outra ruptura de ordem matemática identificada é a transição de linguagem, tendo em vista que, na coleção do EFII, diversos termos matemáticos, bem como o uso de “letras”, são introduzidos como se fossem naturalmente compreendidos pelos estudantes. Acreditamos que esta mudança, aliada àquelas de caráter pedagógico ou psicológico apresentadas em nossa problemática, promove o distanciamento e as *atitudes negativas* dos estudantes com relação à matemática.

Uma limitação de nosso estudo foi a investigação de coleções que não foram elaboradas pelo mesmo autor, o que, possivelmente, colaborou por ampliar as não conexões entre as obras. No entanto, ressaltamos que, assim como é comum a mudança de instituição escolar dos alunos, entre o término do EFI e o início do EFII, também parece comum a descontinuidade entre coleções e obras adotadas nas escolas. Assim sendo, embora reconheçamos como uma limitação de nossa pesquisa, tais dificuldades identificadas aqui são semelhantes às vivenciadas no que se refere às mudanças de escolas.

Queremos, por fim, deixar claro que as investigações aqui relatadas não tem como foco a desqualificação das obras analisadas, mas sim, possibilitar ao professor refletir acerca dos conhecimentos e das abordagens necessárias e complementares ao uso do livro, em suas aulas de matemática. Sem dúvida, o professor tem papel fundamental na construção de significados dos conceitos matemáticos e, em particular, na ressignificação de tais significados na matemática escolar.

## Referências

ARAÚJO, A. M. **A passagem da 4ª para a 5ª série: o que pensam professores dessas séries sobre os conteúdos essenciais de matemática.** 2003. 219 p. Dissertação (Educação). Universidade Federal do Paraná - PR. 2003.

BANDARRA, L. O sinal de igual – um estudo vertical. ETEM 2011 - Ensino e Aprendizagem da álgebra. **Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática**, M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, J. P. Ponte, (eds), 7-8 Maio, 2011, p. 305–322.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF. 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, MEC/SEF. 1998.

BRITO, M. R. F. **Um estudo sobre as Atitudes em Relação à Matemática em Estudantes de 1º e 2º graus.** Tese de Livre Docência não Publicada, UNICAMP, Campinas, 1996

BIGODE, A. J. L.; RODRIGUES, J. G. **Matemática do Cotidiano & suas Conexões.** 4º e 5º anos. São Paulo. FTD: 2008.

CAINELLI, M. R. **Entre continuidades e rupturas: uma investigação sobre o ensino e aprendizagem da História na transição do quinto para o sexto ano do Ensino Fundamental.** Educ. rev., Curitiba, n. 42, dez. 2011. Disponível em: <[http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S0104-40602011000500009&lng=pt&nrm=iso](http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0104-40602011000500009&lng=pt&nrm=iso)>. Acesso em 10 nov. 2014.

CAVALCANTI, J. D. B.; SANTOS, M. C. Um estudo sobre compreensões do sinal de igualdade: noção operacional e relacional de equivalência. In: COMITÊ

INTERAMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12, Santiago de Querétaro. Anais... Santiago de Querétaro, 2007. Disponível em:

<[http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/memorias/xii\\_ciaem/153\\_estudo\\_compreensoes.pdf](http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/memorias/xii_ciaem/153_estudo_compreensoes.pdf)>. Acesso em: 08 nov. 2014.

DANTE, L. R. Livro didático de Matemática: uso ou abuso. Aberto, p. 83-90, 1996.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**. 6º e 7º anos. Ática: 2011.

DIAS DA SILVA, M. H. G. F. **Passagem sem rito: as 5ª séries e seus professores**. Campinas: Papirus, 1997. Série Pedagógica.

DOMINGUES, M. H. M. S. **A escola de 1º grau: passagem da 4ª para a 5ª série**. 1985. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação: Psicologia da Educação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP.

FREITAS, N. K.; RODRIGUES, M. H. O livro didático ao longo do tempo: a forma do conteúdo. **Revista da Pesquisa**, v. 3, n. 1, p. 1-8, 2008.

HAUSER, S. D. R. **A transição da 4ª para a 5ª série do Ensino Fundamental: uma revisão bibliográfica**. 2007. 62 p. Dissertação (Psicologia da Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP, 2007.

KIERAN, C. **Concepts associated with the equality symbol**. Educational Studies in Mathematics, p, 317-326, 1981.

LUCCHESI, F. D. M., FERREIRA, L. A. **A transição da 4ª para a 5ª série na educação física**. Revista Mackenzie de Educação Física e Esporte, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 111-122, 2009.

MORTIMER, E. F. **Evolução do atomismo em sala de aula: mudanças de perfis conceituais**. 1994. 281 f. Tese (Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1994.

SILVA, A. M. R. **Dos Estudos Sociais da 4ª série e a Geografia da 5ª série: polemizando sobre a descontinuidade a partir da vivência de ensinar à vivência de ensinar a ensinar**. 1999. 174 p. Dissertação (Geociências). Universidade Estadual Paulista - Unicamp, Campinas-SP.

STEPHENS, M. **Students' emerging algebraic thinking in the middle school years**. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia: Mathematics: Essential Research, Essential Practice v.2, p. 678-687 .2007, Hobart, Australia: MERGA

STEPHENS, M.; RIBEIRO, A. J. **Working towards algebra: the importance of relational thinking**. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México, v. 15, p.374-402, 2012.

TRIVILIN, L. R. **Conhecimentos de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental para o ensino dos diferentes significados do sinal de igualdade**. Dissertação. (Mestrado em Ensino, História e Filosofia das Ciências e Matemática) – Universidade Federal do ABC (UFABC), 127 f. 2013.

TRIVILIN, L. R.; RIBEIRO, A. J. **Conhecimento Matemático para o Ensino de Diferentes Significados do Sinal de Igualdade: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Boletim de Educação Matemática (BOLEMA). Rio Claro, São Paulo, 2015 (no prelo)

**Submissão: 01/12/2014**

**Aceite: 31/12/2014**