O MODELO COMERCIAL: UM ENTRAVE PERSISTENTE À APRENDIZAGEM DA REGRA DE SINAIS[1]

THE COMMERCIAL MODEL: A PERSISTENT OBSTACLE TO LEARNING THE RULE OF SIGNS

Selma Felisbino Hillesheim[2]
Universidade Federal de Santa Catarina/selmafh@yahoo.com.br

Méricles Thadeu Moretti[3]
Universidade Federal de Santa Catarina/mtthmoretti@gmail.com

Resumo

A regra de sinais para a multiplicação, mesmo tendo sido utilizada por vários séculos, só foi demonstrada em 1867 por Hankel. Do ponto de vista matemático, a questão está resolvida completamente, mas dificuldades no ensino e na aprendizagem dessa regra ainda persistem hoje. O modelo comercial para os números relativos é ainda um modelo importante no ensino dos números relativos e que, muitas vezes, se transforma na sua própria concepção. Neste trabalho, criticamos de forma contundente esse modelo, analisando-o do ponto de vista da noção de congruência semântica desenvolvida por Duval e apresentamos uma alternativa que toma por base o princípio de extensão. Um estudo com alunos do 7º ano do ensino fundamental aponta uma possibilidade de ensino para os negativos e obstáculos que se estabelecem quando esses números são ensinados e a metáfora comercial é adotada.

Palavras-chave: Números Negativos. Regra de Sinais. Modelo comercial. Princípio de Extensão. Congruência Semântica.

Abstract

The rule of signs theory for multiplication has been used for many centuries, it was, however, only demonstrated for the first time in the year of 1867 by Hankel. From a mathematical point of view the issue regarding this theory is completely solved, but some difficulties in teaching and learning it still persists nowadays. The commercial model for relative numbers is still an important model in teaching relative numbers and often turns into its own conception. In the present study this model will be strongly criticized based on Duval's semantic concept of coherence and an alternative will be presented taking as a basis the extension principle. A study involving students of the 7th grade of Junior High indicates not only a new possibility for teaching negative numbers, but also some obstacles created when the teaching of such numbers bases on the commercial model.

---

[1] Apoios Capes e CNPq

[2] Mestre pelo PPGECT e Professora de matemática da rede pública estadual de Santa Catarina

[3] Doutor em Didática da Matemática-ULP/Estrasburgo e Prof. do Depto. de Matemática e PPGECT/UFSC.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

Keywords: Negative numbers. Rule of signs. Commercial model. Extension principle. Semantic coherence.

1. INTRODUÇÃO

O ensino dos números relativos no ensino fundamental enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos. A dificuldade enfrentada pelos alunos atualmente na aprendizagem da multiplicação de dois números negativos, também foi percebida pelos matemáticos do passado ao longo da trajetória histórica da consolidação do número negativo.

A introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo[4]. Diofanto não faz nenhuma referência aos números relativos, mas, em seu Livro I *Aritmética,* ele menciona: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (2007, p. 22).

No período compreendido entre Diofanto e Hankel, muitos matemáticos se propuseram a construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos. Porém Hankel, em 1867, formalmente apresenta que a regra usual é a única das regras possíveis que preserva as distributividades à esquerda e à direita.

De acordo com Glaeser (1981), o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números. Hoje, do ponto de vista matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. Entretanto, do ponto de vista didático/pedagógico, muitas dificuldades ainda precisam ser ultrapassadas. Por meio do modelo metafórico, o aluno é facilmente convencido de que se ele tem cinco reais (+5) e deve três reais (–3), ao pagar a dívida lhe sobram dois reais (+2), contudo, dificilmente será convencido do mesmo em (–3) × (–2) = +6. Como uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? "Nessas condições, não se está introduzindo um *falso contrato didático* quando se utiliza o modelo concreto para apresentar o conjunto dos números relativos?" (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183, grifos da autora).

O modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981), pode facilitar o entendimento do aluno a respeito dos problemas aditivos de números relativos, assim como os que aparecem nos livros didáticos, porém essa abordagem pode trazer dificuldades para a compreensão de problemas multiplicativos. Nesse sentido, pensamos que "é necessário para a construção do pensar matemático também uma formalização da linguagem matemática, e trabalhar a sua construção, permite uma melhor compreensão das produções e

[4] Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas, de acordo com Eves (2004, p. 207), a maioria dos historiadores o situa no Século III d.C.

das problematizações da matemática nas condições ontológicas" (SAD[5], 2005 *apud* ANJOS, 2008, p. 91). Essa formalização da linguagem matemática pode ser percebida quando Caraça (1963) nos fala do "princípio de extensão". O homem por meio das suas abstrações e generalizações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. O trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios foi que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos. Foi essa barreira que Hankel derrubou ao mostrar que a explicação para a regra de sinais $- \times - = +$ não poderia ser procurada na natureza (GLAESER, 1981).

Além dessa questão, podemos analisar o ensino das operações dos relativos numa outra perspectiva, o da congruência e da não congruência semântica, introduzida por Duval (2012). Um dos obstáculos enfrentados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica. Nessa perspectiva, este artigo emergiu da fundamentação teórica da nossa pesquisa de mestrado (HILLESHEIM, 2013) e como uma proposta de extensão da mesma. Após a nossa intervenção didática, que ocorreu no período do mestrado, sentimos a necessidade de apurar, em quais aspectos a nossa atuação se destacou de um ensino convencional. Assim, este trabalho se caracteriza como uma pesquisa de abordagem qualitativa na forma de estudo de caso, por se tratar de uma pesquisa realizada em duas turmas de 7º ano do ensino fundamental. Como instrumento de coleta de dados, utilizamos a aplicação de um teste que contemplou as operações de adição, multiplicação e subtração de números inteiros com questões em que as situações de congruência semântica e o modelo comercial se fizeram presentes. O teste foi aplicado numa aula de quarenta e cinco minutos em duas turmas do 7º ano. A análise das respostas apresentadas pelos alunos nos testes esteve pautada na ideia de congruência semântica e no "princípio de extensão". A partir dessas análises e do referencial teórico adotado, propomos uma reflexão teórica ilustrada por exemplos de situações que foram encontradas nesses testes.

2. O ENSINO DOS NÚMEROS INTEIROS RELATIVOS

Os números inteiros relativos, no Brasil, são apresentados formalmente aos alunos no 7º ano e muitas dificuldades podem ser percebidas no seu processo de ensino e aprendizagem. Os alunos chegam ao 7º ano associando a ideia de número a uma grandeza. Isto pode ser percebido nos mais variados assuntos contemplados no currículo das séries iniciais do ensino fundamental e do 6º ano. Até o 6º ano, operações do tipo $a - b$ só podem ser resolvidas se $a \geq b$, pois é impossível conceber, por exemplo, a ideia de se tirar 7 balas de um pacote que tinha apenas 5 balas.

> A perturbação se instala, quando a subtração $(a - b)$ é aplicada a casos em que $b > a$, gerando um resultado até então inexistente e demonstrando assim o caso típico em que as formas (operações) geram um novo conteúdo. Admitir a realidade deste novo resultado implica reconhecer a existência

[5] SAD, Lígia A. História da matemática e epistemologia da aprendizagem. In: COLÓQUIO BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 1., 2005, Natal. Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática, 4., 2005. **Anais.** Natal: UFRN, 2005.

> de uma nova classe de números – os negativos (TEIXEIRA, 1993, p. 62).

Nos anos que antecedem o 7º ano, a concepção formada pelos alunos a respeito da operação de adição está fortemente relacionada a um aumento e a subtração está ligada ao ato de tirar/diminuir. Essas concepções prévias, que os alunos trazem consigo, contribuem ainda mais para gerar dificuldades e conflitos que se estabelecem entre o "significado prático de magnitude ou associação de quantidades com número anterior ao ensino da aritmética e o conceito de número negativo" de acordo com Fischbeim[6] e Hefendehl-hebeker[7] citados por Nascimento (NASCIMENTO, 2004, p. 2).

Para Teixeira (1993), o conceito de adição deve ser ampliado no conjunto dos números inteiros relativos, não pode mais se limitar a ideia de acrescentar. Da mesma forma, "subtrair inteiros significa trabalhar com operadores negativos, ou seja, números que operam transformações de oposição" (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Por exemplo, – 4 – (– 5) = – 4 + 5 ou ainda, – 4 – (+ 5) = – 4 – 5.

Ainda, seguindo essa linha de pensamento das operações com números inteiros, a multiplicação, no conjunto dos números inteiros, não pode mais ser completamente compreendida como uma adição de parcelas iguais. Quando um dos fatores é positivo e o outro negativo, ele pode ser facilmente compreendido como a repetição do fator negativo, conforme indica o operador positivo, por exemplo, (+ 2) × (– 5) pode ser expressa como (– 5) + (– 5). O mesmo raciocínio se aplica, quando temos dois fatores positivos. Mas, a multiplicação com números inteiros relativos encontra situações em que essa repetição não pode ser operada como, por exemplo, o caso (– 4) × (– 4) = 16.

Os resultados das pesquisas desenvolvidas por Borba (2009) apontam que os números positivos e negativos podem assumir diferentes significados nos mais diversos contextos. Nesse sentido, um número positivo poderá representar uma *medida positiva,* uma *transformação positiva* ou uma *relação positiva*[8]*.* Da mesma forma, porém, com sentido contrário, um número negativo poderá representar uma *medida negativa,* uma *transformação negativa* ou uma *relação negativa* que, matematicamente, podem ser representados por um mesmo símbolo, no entanto, cognitivamente, envolvem significados diferentes. A autora aponta como conclusão dos seus estudos quanto à compreensão dos números inteiros relativos que "(...) é mais fácil entender o significado de número relativo, enquanto medida, do que o significado de relação" (BORBA, 2009, p. 99). No entanto,

> É importante que o número seja entendido enquanto relação, para além de uma simples resposta às questões *quantos são?*

---

[6] FISCHBEIM, E. **Intuition in Science and Mathematics**: An Educationl Approach (D. Reidel Publishing Co., Dordrecht), 1987, p. 97-102.

[7] HEFENDEHL-HEBEKER, L. Obstacles in Their evolution From Intuitive to Intellectual Construts. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, .(1, 1991, p. 26-32.

[8] A autora caracteriza a medida positiva como dinheiro possuído, temperatura acima de zero, saldo credor de um campeonato. A transformação positiva pode ser entendida como dinheiro depositado ou ganho, subida de temperatura, pontos ganhos em um jogo. E, relação positiva como dinheiro, temperatura, pontos a mais que a medida inicial.

Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

> *E quanto mede?* Acostumar a criança a *pensar em relações,* ajudá-la a superar o obstáculo do pensamento substancial e ensiná-la a trabalhar corretamente a relação entre *Matemática e aplicação da Matemática* são diretrizes básicas para o professor de Matemática (ASSIS NETO, 1995, p. 4, grifos do autor).

Esse trabalho de acostumar a criança a pensar a matemática como uma relação é um processo desafiador, pois, para além das fronteiras do espaço escolar, estudos apontam que, apesar da apresentação formal do conceito de número negativo ser feita somente no 7º ano, as crianças em séries anteriores já possuem algumas noções intuitivas acerca de números negativos.

A pesquisa realizada por Maranhão, Camejo e Machado (2008, p. 163) nos relata uma experiência com alunos do 2º ano do ensino fundamental, em que um desses alunos, para resolver a subtração 35 – 27, fez o seguinte raciocínio: "Eu tiro 20 do 30 e 7 do 5 [30 – 20 = 10; 5 –7 = –2]" chegando ao resultado 8. Esse caso foi levado para cinco professoras/alunas do 6º semestre do curso de pedagogia, para que elas realizassem uma análise da situação. Os relatórios apresentados pelas professoras-alunas mostraram um certo desconforto em lidar com a situação. Apenas uma professora-aluna admitiu a existência do número negativo. As demais atribuíram o sinal negativo do 2 a operação de subtração. Essa experiência comprova que os professores das séries iniciais também precisam estar preparados para saber trabalhar com situações que envolvam o conceito de números negativos. Caso contrário, poderão contribuir para a formação de entraves que, futuramente, afetarão no processo de ensino e aprendizagem desses números.

Buscando descobrir o que os alunos já sabem, antes da introdução formal do conceito de número inteiro relativo, Moretti e Borba (2004) realizaram a aplicação de um teste com 65 crianças de 9 a 12 anos numa escola particular do Recife. O teste foi composto por 11 questões contendo situações de jogo, compras, saldo bancário, deslocamento em elevadores, viagens e esportes. Os resultados da pesquisa mostraram que:

> Antes de serem formalmente introduzidas ao conceito de inteiro relativo, as crianças são capazes de resolver não só problemas inseridos em contextos de jogos – como observado em estudos anteriores – mas também em questões mais formais, como as usualmente trabalhadas na escola (MORETTI e BORBA, 2004, p. 19).

Desse modo, podemos perceber que a noção intuitiva de número negativo ultrapassa as barreiras do espaço escolar. A pesquisa realizada por Santos[9] *apud* MORETTI e BORBA (2004, p. 4) mostrou que os agricultores com apenas 2,9 anos de média de frequência escolar conseguiram resolver situações hipotéticas, envolvendo as operações de adição, subtração e divisão com números relativos. Esse autor concluiu que a ausência do ensino formal não impediu a realização dos cálculos com números negativos por parte dos

[9] SANTOS, A. **Compreensão e uso de números relativos na agricultura e na escola**. Dissertação (Mestrado em Psicologia Cognitiva). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1990.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

agricultores. Isso porque eles se basearam nas suas experiências cotidianas em relação a lucros e prejuízos.

Pensando ainda na ideia de número negativo fora do espaço escolar, Lins e Gimenez (1997) propõem uma reflexão bastante interessante a esse respeito. Eles argumentam que o significado do número negativo "da rua" se diferencia do significado de número negativo da escola. Nas palavras dos autores:

> Na rua encontramos, sim, números negativos – temperaturas negativas e saldo bancário negativo -, mas certamente não são os números negativos da escola. Temperaturas, por exemplo, não são jamais somadas (Qual o resultado de somar a temperatura de Fortaleza com a de São Paulo?), e menos ainda multiplicamos os números negativos da rua (Três abaixo de zero vezes cinco abaixo de zero? Débito vezes débito?). Muitos de vocês podem estar pensando: 'Mas temperaturas e dívidas são bons recursos didáticos...' Sugerimos que o leitor que achou estranho o que dissemos anteriormente pare e reflita: Quando usamos como recursos as dívidas, e queremos produzir significado para (–3) × (–5), não é verdade que o primeiro fator quer dizer 'perder 3 vezes' e não 'uma dívida de três'? Você acha que faz sentido multiplicar duas *dívidas*? (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 13, grifos do autor)

Não se trata aqui de defendermos o número negativo da rua ou o da escola, mas sabermos que cada uma dessas concepções precisa ser levada em consideração nos momentos de ensino, cada qual com o seu potencial. Não se trata de legitimar uma em detrimento da outra. "A ideia de valorizar o que a rua sabe apenas como ponto de partida faz parte de um discurso que, embora pareça razoável do ponto de vista didático, é perverso do ponto de vista cultural" (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 19). Foi justamente esse pensamento de número negativo atrelado ao pensamento concreto que travou durante um longo período histórico o debate a respeito da multiplicação desses números, na comunidade acadêmica. Entretanto, somente

> [...] quando a matemática acadêmica assume que definitivamente não há significado na rua para a multiplicação de números negativos, e passa a buscar, então, um significado produzido com base nos princípios que permitem, na matemática acadêmica, a existência daquelas estranhas coisas, quantidades que são menos do que nada (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 13).

Voltando para contexto da sala de aula, segundo Borba (2009), os alunos associam mais rapidamente o significado de um número inteiro relativo enquanto medida do que como relação. Os professores ao apresentarem os números relativos aos alunos como medidas, associando ao número positivo a ideia de um ganho e ao número negativo a ideia de uma perda, como eles aparecem na rua, conseguem obter sucesso nas suas aulas, e os alunos compreendem facilmente as operações de adição e subtração com esses números. Contudo, esse modo de ensinar os números inteiros relativos encontra dificuldades, quando o professor apresenta a multiplicação desses

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

números. Como explicar que uma perda multiplicada por uma perda se transformou num ganho? Exemplificando, (– 2) × (– 3) = + 6. O que antes era completamente contextualizado com situações concretas, que poderiam ser vivenciadas e compreendidas pelos alunos, agora na multiplicação não faz nenhum sentido.

O modelo comercial, assim denominado por Glaeser (1981), em que os números relativos estão associados à ideia de ganho/perda não tem relação nenhuma com a regra de sinais "menos vezes menos dá mais". No entanto,

> [...] como é concreto e ele facilita muito a compreensão dos relativos no início de sua aprendizagem, os alunos o adotam e querem utilizá-lo enquanto não é mais adaptado: não somente, ele não explica mais nada, mas ele representa mais nada, ele não funciona nem mesmo ao nível do símbolo (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183).

Michelot[10] *apud* COQUIN-VIENNOT (1985, p. 183), preocupou-se por muito tempo em demonstrar que "a noção do número negativo só pode ser definido corretamente em nível do pensamento formal". Pois, ao contrário, segundo Coquin-Viennot (1985, p. 183), não estaríamos introduzindo um falso contrato didático ao utilizarmos um modelo concreto para apresentarmos os números relativos? Quando o professor se utiliza desse modelo comercial, ele procura somente facilitar a apresentação e a aprendizagem dos números relativos, no entanto "[...] esse modelo comercial é tão prático, tal que ele é reforçado durante todo o início da aprendizagem que ele se instala definitivamente no espírito do aluno, não mais como um modelo, mas como uma *concepção* dos relativos" (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 184, grifos do autor).

O processo de ensino e aprendizagem da multiplicação, que procede a adição dos números relativos, segundo Coquin-Viennot, pode encontrar dificuldades se a concepção desses números for plantada somente em bases concretas. Assim, para que a multiplicação dos números relativos possa ser alcançada e compreendida pelos alunos, de acordo com essa autora, é preciso que ocorra uma reversão desse quadro. Porém, essa concepção está tão bem estabelecida, que ela, nela mesmo, constitui um verdadeiro obstáculo para a compreensão das propriedades multiplicativas dos números relativos (1985, p. 184).

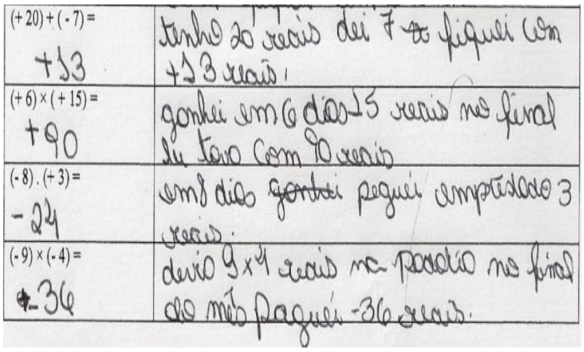
Ainda, segundo Coquin-Viennot (1985), a apresentação dos números relativos pautados somente no "modelo comercial" pode trazer prejuízos ao ensino da multiplicação desses números, bem como dificultar a aprendizagem de outros conceitos. Durante a nossa pesquisa de mestrado (HILLESHEIM, 2013), encontramos um exemplo que corroborara com a posição defendida por Coquin-Viennot. Foi solicitado aos alunos que resolvessem as operações propostas e apresentassem uma justificativa.

---

[10] MICHELOT, M. La notion de zero. Paris: Flammarion, 1969.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

Figura 1 – Justificativa apresentada pelo aluno



Aqui, o modelo comercial funcionou para explicar as operações.

Neste caso, o modelo comercial

Fonte: HILLESHEIM (2013, p. 155)

Este aluno obteve sucesso em todos os seus cálculos e justificativas até o momento que se deparou com uma multiplicação entre dois números negativos. Então, o modelo comercial, que se adequava tão bem até o momento, deixou de funcionar e o conduziu a um resultado errado. Neste sentido, Coquin-Viennot nos aponta que:

> Essa concepção (na base concreta) não pode funcionar numa estrutura multiplicativa; é necessário revertê-la a fim de prosseguir a aprendizagem, mas ela está bem estabelecida, bem cômoda para resolver os problemas aditivos encontrados até aqui, que ela, nela mesmo, constitui um verdadeiro obstáculo para a instalação do nível IV (1985, p. 184).

O nível IV que Coquin-Viennot menciona é justamente a concepção da multiplicação de números relativos. Em outras palavras, o modelo concreto que funciona muito bem para o ensino das propriedades aditivas constitui-se como um entrave para o ensino das propriedades multiplicativas desses números. Apesar de o aluno haver participado de uma sequência didática planejada a fim de não associar o número positivo a um ganho e o número negativo a uma perda, por exemplo, mesmo assim, esta concepção trazida de experiências anteriores não foi capaz de ser abalada. Nas justificativas apresentadas por este aluno, percebemos, sem sombra de dúvidas, que o modelo comercial que serviu para explicar as propriedades aditivas e até mesmo algumas multiplicativas encontrou obstáculos para explicar a multiplicação entre dois números negativos. Ao que tudo indica, o modelo comercial se instalou definitivamente, não apenas como um modelo, mas como uma concepção a respeito dos relativos.

Glaeser (1981, p. 344), por meio de um estudo histórico, discute que um ensino pautado somente sobre exemplos concretos pode ser nocivo. Ele se contrapõe fortemente à ideia de que o ensino da matemática deve se pautar em um ensino baseado em exemplos concretos.

Outro fator que contribui para que o ensino dos números inteiros seja conduzido por meio do modelo comercial é a forma de como os livros didáticos abordam esses números. Durante a nossa pesquisa de mestrado, realizamos uma análise dos livros didáticos de matemática do 7º ano apontados pelo guia do Plano Nacional do Livro Didático de 2011. Como resultado dessa análise, constatamos que 60% deles utilizam o modelo aritmético para abordar a adição de números inteiros. Os autores se basearam em situações problemas que relacionaram o número positivo a ideia de ganho/lucro/crédito e a ideia de número negativo atrelada à perda/débito/prejuízo, ou seja, utilizaram o modelo comercial. Em 40% dos livros a operação de subtração, também foi apresentada, utilizando esse mesmo modelo.

Mas, se o processo de ensino e aprendizagem dos números relativos encontra dificuldades, o que fazer? Na busca por uma resposta a esse questionamento, fomos desafiados a procurar subsídios teóricos e metodológicos que nos auxiliassem a encontrar um caminho que pudesse trazer melhorias ao processo de ensino e aprendizagem desses números.

3. O PRINCÍPIO DE EXTENSÃO DE CARAÇA

Glaeser (1981) nos provoca ao dizer que o "bom modelo" utilizado para ensinar as propriedades aditivas, baseado no "modelo comercial", associando a ideia de ganho a um número positivo e ao número negativo ao de uma perda, pode trazer riscos ao ensino das propriedades multiplicativas desses números. Dessa forma, o ensino dos números relativos precisa sofrer mudanças, não podendo mais se prender somente a exemplos baseados em situações cotidianas, haja vista que, historicamente, o número negativo não surgiu num contexto aritmético, mas, sim, num contexto algébrico.

> Contudo, o ensino atual dos números inteiros se introduz em um contexto aritmético, tanto nas situações que introduz como nas técnicas que utilizam para resolvê-las, contexto em que não são necessários como estratégia de resolução. Como consequência, o estabelecimento de suas regras de cálculo fica totalmente a mercê do modelo concreto que se utiliza para introduzi-los, e este tratamento didático contribui, todavia, ainda mais para agravar o obstáculo epistemológico (CID, 2000, p. 13).

Costa complementa essa ideia ao apontar que a origem histórica da noção de número negativo não está atrelada à classe de grandezas, mas que ela emergiu "[...] na necessidade de interpretar o resultado de uma subtração, quando o minuendo é menor que o subtraendo" (p. 1971, 222).

Com a engenhosa ideia da criação do símbolo i (unidade imaginária) e da igualdade $i^2 = -1$, foi possível ultrapassar o obstáculo relacionado às raízes de índice par com radicando negativo. Assim, $\sqrt{-9} = \pm 3i$ e, como consequência, fez-se necessário criar um novo campo numérico, o campo dos complexos. "A necessidade de levantar essa exceção, de modo a tornar possíveis todas as operações sobre os números reais, teve como resultado a criação dos números complexos. Essa nova classe de números é, portanto, de origem algébrica" (COSTA, 1971, p. 222).

Essa capacidade que o homem tem para fazer generalizações e abstrações, Caraça o caracteriza como "princípio de extensão":

> [...] o homem tem tendência a generalizar e entender todas as aquisições do seu pensamento, seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível

> dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências. Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas normas, certos princípios. Aquele princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de princípio de extensão (CARAÇA, 1963, p. 10).

Esse trabalho intelectual do homem orientado por certas normas e princípios, do qual Caraça nos fala, foi o que propiciou a ampliação dos conjuntos numéricos e das suas operações. Assim, “As operações sobre números relativos definem-se por extensão imediata das operações com o mesmo nome estudadas no campo real” (CARAÇA, 1963, p. 100).

O homem pelas suas generalizações e abstrações conseguiu transpor o pensamento unicamente concreto e ascender ao campo formal das operações. Foi, justamente, este obstáculo que Hankel conseguiu superar ao mostrar que a explicação para a regra de sinais – × – = + não poderia ser procurada na natureza, e que ela precisaria ser demonstrada formalmente (GLAESER, 1981).

No processo de ensino e aprendizagem dos números inteiros relativos, esse processo de generalização também precisa estar presente, uma vez que a descoberta da existência do número negativo está ligada a existência do positivo. Desta forma,

> A compreensão do que seja número negativo avança paulatinamente, por abstrações e generalizações, na medida em que a criança descobre que se negativo é menor do que positivo, há um ponto de onde positivo e negativo se originam. Isso leva, por sua vez, à necessidade de nova ampliação, porque, nos naturais, a assimilação do zero foi feita com base no significado da ausência de quantidade. Agora, é preciso ampliar este significado, ou seja, diferenciá-lo da concepção de zero origem (TEIXEIRA, 1993, p. 63).

Da mesma maneira que a concepção do zero precisa ser ampliada, também, a concepção das operações de adição, subtração e multiplicação precisam sofrer novas significações no conjunto dos números inteiros relativos. Além das operações, o sinal de + (mais) que outrora representava uma adição, agora nos relativos pode representar um estado. Da mesma forma, o sinal de – (menos) que no conjunto dos Naturais representava uma operação de subtração, agora também passa a ser considerado como um sinal predicativo. Neste sentido, vale salientar que:

> Os números positivos e negativos representam estados e operações, por exemplo: - 2 representa ao mesmo tempo 2 unidades abaixo de zero, portanto, que se localizam na região negativa, como também significa “2 a menos que”, indicando a operação de deslocamento, que produzirá transformações em um certo sentido (no caso de número negativo significa deslocar a esquerda e, de positivo, deslocar a direita) (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Esta confusão entre os sinais operatórios e predicativos, de acordo com Glaeser (1981), foi percebida primeiramente por Cauchy, em meados do século XIX, que os diferenciou como sinais operatórios aqueles que designam uma ação (aumentar, diminuir) e os predicativos aqueles que qualificam um estado (positivo ou negativo).

No nível de aprendizagem, essas ampliações e ressignificações das operações dos naturais para os relativos requerem uma atenção especial. Podemos pensar no sentido da congruência semântica apresentada por Raymond Duval por meio da sua Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

4. CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA

Um dos obstáculos encontrados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica. Sobre este assunto, Duval destaca: “Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem “querer dizer a mesma coisa”, elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão” (DUVAL, 2012, p.100).

Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea, diz-se que há congruência semântica. Para isso, ela deve atender a três condições, de acordo com Duval (2004, p. 53):

> - Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.
> - Univocidade “semântica” terminal, em que para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada.
> - A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada.

Porém, quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si, e a passagem de um sistema de representação a outro não acorre de imediato (DUVAL, 2004, p. 17). Em outras palavras, poderíamos dizer, *grosso modo*, que há congruência semântica quando o aluno reconhece facilmente o objeto matemático, ao passo que, quando esse reconhecimento não ocorre tão facilmente, diz-se que não há congruência semântica. Dessa forma, o problema da congruência ou da não congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e, também, maior será o risco do processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos.

A seguir, apresentaremos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval por meio de uma questão, da nossa pesquisa, aplicada a duas turmas do 7º ano:

“Joana ganha 40 reais de sua mãe. Compra um livro por 30 reais. Seu pai lhe dá 8 reais. Joana vai ao cinema e gasta 13 reais. a) Escreva uma expressão numérica que represente o saldo de Joana. b) Qual é o saldo de Joana?”

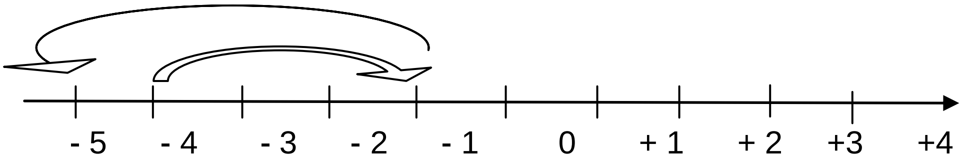
Neste exemplo, podemos destacar a correspondência semântica entre as unidades e a expressão (+40) + (–30) + (+8) + (–13); a univocidade “semântica” em que para cada ação de partida, corresponde a um só registro de chegada. Os verbos ganhar/dar estão associados aos números positivos, enquanto os verbos comprar/gastar estão relacionados aos números negativos. A ordem dentro da apresentação dos dados numéricos de partida é conservada na mesma ordem da representação de chegada. Desta forma, podemos dizer que existe a congruência semântica entre a frase e a expressão. E, neste caso, também pode ser notada a equivalência referencial entre a frase e a expressão aritmética.

Com a aplicação desta questão, observamos um alto índice de sucesso nas respostas apresentadas pelos alunos. Dos 69 alunos que participaram da pesquisa, 80% responderam a questão corretamente. Esses resultados podem ser analisados sob a perspectiva da congruência semântica. A situação apresentada possui congruência semântica com a sua resolução, além de estarem estreitamente relacionados com a ideia do modelo comercial. Entretanto, essa associação “codificada”, que no momento é muito confortável, poderá causar dificuldades na resolução de problemas em que essas associações nem sempre se traduzem em equivalência referencial. De acordo com Duval, a

> [...] atividade matemática pode ser bem sucedida se a sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulações ou de representações congruentes e, a mesma tarefa matemática dada como uma variante que implique uma manipulação de dados não congruentes, pode conduzir ao insucesso (DUVAL, 2012, p. 110).

Como exemplo de uma tarefa matemática que envolveu a manipulação de dados não congruentes, propusemos aos alunos que escrevessem uma expressão numérica que representasse os movimentos do desenho a seguir, tomando como ponto de partida o –4:

Figura 2 – Desenho da questão



Fonte: HILLESHEIM (2012)

O resultado da pesquisa apontou que do total de alunos participantes da pesquisa, apenas 17% responderam a questão corretamente. Essa situação ilustra a ideia de congruência semântica apresentada por Duval (1993). A não

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

congruência semântica entre os movimentos propostos pelas setas e o seu registro numérico foi um fator importante na resolução da questão. No momento em que o aluno faz a conversão do registro geométrico para o registro numérico a congruência semântica conduz a expressão numérica (–4) + (–1) + (–5). No entanto, a equivalência referencial indica que, partindo do –4, houve um deslocamento de 3 unidades para a direita (+3) e, em seguida, um deslocamento de 4 unidades para a esquerda (–4) chegando ao resultado da expressão, –5. Nesse caso, de acordo com Duval (1993), a congruência semântica destaca-se da equivalência referencial, e o sucesso da resposta, para esta questão, depende da equivalência referencial. “Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes” (DUVAL, 2012, p.100).

Ainda, nesse sentido, Moretti aponta para os reflexos da congruência semântica no ensino:

> Problemas discursivos que são semanticamente congruentes com a expressão matemática, mas que não são referencialmente equivalentes, levam a uma taxa muita baixa de sucesso; da mesma forma acontece com problemas que são referencialmente equivalentes, mas não são semanticamente congruentes. A resolução de problemas que solicitam a passagem de um registro discursivo para um registro aritmético ou algébrico exige a equivalência referencial (MORETTI, 2012, p. 705).

Nessa direção, o professor deve ficar atento ao fato de que nem sempre a congruência semântica conduz a resultados bem sucedidos na resolução de problemas matemáticos, e que, produzindo diferentes formulações para um mesmo problema, poderá, desta forma, contribuir para uma verdadeira compreensão matemática.

Segundo Duval (2005), no ensino da matemática, na maioria das vezes, um sentido de conversão é privilegiado, reforçando a falsa ideia de que o treinamento realizado num sentido estaria automaticamente exercitando a conversão no outro sentido. Esta é uma visão muito ingênua que se propaga nas situações de ensino da matemática. Na maioria das vezes, os estudantes não conseguem perceber o mesmo objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes. A representação do cálculo de uma adição de números relativos e a sua representação através de deslocamentos na reta numérica, dificilmente um aluno, em nível de ensino fundamental, conforme nos apontou o resultado da pesquisa, e até mesmo médio, consegue estabelecer as relações entre o cálculo e a sua representação geométrica na reta numérica, e vice-versa.

Essa coordenação está longe de ser natural e observa-se, então, o que Duval chama de um “enclausuramento de registros de representação” (DUVAL, 1993, p. 52). O aluno “enxerga” o objeto matemático apenas por um sistema de representação. Essa ausência de coordenação não impede toda a compreensão, mas esta compreensão limitada, que se dá através do mono-registro, conduz um trabalho às cegas em que o aluno não tem um controle do

Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

sentido do que é feito. Duval (2012) afirma que mudanças na escrita permitem mostrar propriedades diferentes de um mesmo objeto matemático, porém conservando a mesma referência.

Os diferentes registros de representação se completam, dando-nos uma melhor compreensão do objeto matemático. A aprendizagem de um objeto matemático torna-se significativa quando o aluno, além de realizar os tratamentos em diferentes registros de representação, consegue, também, naturalmente converter um registro de representação em outro. Do ponto de vista cognitivo, de acordo com Duval (2005), a atividade de conversão é essencial na condução à compreensão.

Dessa forma, Duval (2005) afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Uma vez que o principal papel da representação semiótica é que ela pode ser convertida em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, que podem levar a significações diferentes pelo sujeito, de um mesmo objeto matemático. Contudo, ainda, em conformidade com esse autor, esse processo não se estabelece tão facilmente, tendo em vista que os alunos apresentam muita dificuldade no estudo da matemática. Em determinadas situações, o aluno até consegue representar um objeto matemático de maneiras diferentes, mas é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto.

Na atividade matemática, o ato de substituir uma fórmula ou um cálculo por uma outra expressão referencialmente equivalente é essencial. A substitutividade de expressões é uma propriedade que está ligada a estrutura de todo registro semiótico, ela é uma conduta muito importante e frequente nos procedimentos matemáticos.

Os procedimentos utilizados na atividade matemática implicam uma substitutividade tanto inter-registro, quanto intra-registro, ambos pautados numa mesma referência. “A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático e é relativamente a esta substitutividade que os fenômenos de congruência e não-congruência semântica são importantes” (DUVAL, 2012, p.113). Para mostrar, por exemplo, que o deslocamento da reta, conforme a figura anterior, pode ser representado pela operação $(–4) + (+3) + (–4) = –5$ exigiu uma substituição inter-registro, que não apresenta uma congruência semântica com a sua representação geométrica. A congruência semântica conduziria a expressão $(–4) + (–1) + (–5)$ que, por sua vez, se diferencia da equivalência referencial.

Segundo Duval (2012), a não congruência semântica se constitui como uma fonte de dificuldades, para os alunos, independentemente do conteúdo matemático. E, nas operações com relativos a situação não é diferente. Até a apresentação dos números inteiros, os alunos concebiam, nos naturais, que a adição estava rigorosamente atrelada a ideia de juntar. A subtração corresponderia à operação de tirar, e a multiplicação como uma adição de parcelas iguais. Contudo, mesmo que estes conceitos sejam ampliados nos relativos, os fenômenos da não congruência semântica insistem em aparecer. Seja a seguinte questão, por exemplo, aplicada a duas turmas de 7º ano: “Pedro está jogando bolinhas de gude. Na primeira partida, perde seis. Joga

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, ele nem perdeu, nem ganhou. O que aconteceu na segunda partida?” Essa situação é referencialmente equivalente a expressão (–6) + (+6) = 0, contudo, embora a operação seja de adição, foi preciso diminuir os valores absolutos dos números para chegar ao resultado correto, ou seja, a expressão não possui congruência semântica com a situação. Esses fatores podem estar relacionados ao baixo índice de sucessos apresentados pelos alunos, nesta questão. Dos 69 alunos que participaram da pesquisa, apenas 36% responderam a questão corretamente.

De acordo com Caraça, nos relativos, tem-se que:

> $a + (-b) = a + (0 - b) = a + 0 - b = a - b; a - (-b) = a - (0 - b) = a + b - 0 = a + b,$ isto é, somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo. No campo relativo, as duas operações aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama adição algébrica (CARAÇA, 1963, p. 101).

Nos relativos, a operação de adição pode representar situações em que há acréscimo ou decréscimo, ou até mesmo somas que dão resultado zero. Assim, “a adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição” (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Da mesma forma que a adição, a subtração também precisa ser ampliada. Para Teixeira, “[...] a construção operatória da subtração supõe a assimilá-la como inversa à adição, de tal forma que, em uma dada reunião ou associação de elemento $(a + b = c)$, é possível chegar ao ponto de partida, (a), por exemplo, pela diferença $(c - b)$, ou seja, pela operação inversa” (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

No entanto, na nossa pesquisa de mestrado, compactuando com Moretti (2012), defendemos a ideia de que a operação de subtração deve ser apresentada aos alunos, depois da operação de multiplicação, uma vez que, neste ponto, os alunos já conhecem as regras de sinais e poderão simplificar expressão do tipo “$a - (-b)$” e “$a - (+b)$”. Pela aplicação da regra dos sinais da multiplicação, a expressão seria simplificada, conduzindo ao que Caraça (1963) chama de adição algébrica, podendo, dessa forma, ser tratada como deslocamentos sobre a reta dos inteiros, assim como acontece com a adição dos relativos.

Defendemos esse ponto de vista, pois acreditamos que, ao apresentar a operação da subtração como a operação inversa, estaríamos conduzindo os alunos a efetuarem “manobras meio fantasiosas” para a realização dessa operação. E, assim, conduzindo o aluno ao questionamento: Por que precisamos recorrer à operação inversa para efetuar a subtração, uma vez que a adição não exige essa transformação? A resposta a essa indagação encontra-se justamente na regra de sinais. Para que a subtração nos inteiros seja efetuada, precisamos aplicar a regra de sinais a fim de obtermos uma adição algébrica. “Dada a natureza do sistema dos inteiros, a subtração nada

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

mais é que a composição entre operadores, ou seja, uma adição" (TEIXEIRA, 1993, p. 65).

No caso da multiplicação dos relativos, a barreira encontrada para o seu ensino encontra-se na ideia que a multiplicação, nos naturais, é concebida como uma soma de parcelas iguais. Nos inteiros, a multiplicação de um número positivo por outro positivo, já dominada nos naturais, e a multiplicação de um número positivo por um número negativo pode ser perfeitamente entendida como uma repetição de parcelas. Por exemplo, (+3) × (– 5) pode ser concebido como três deslocamentos de (–5) que resulta em –15. Da mesma forma, a multiplicação de dois números positivos, por exemplo, (+4) × (+2) pode ser entendido como quatro deslocamentos de (+2) que resulta em +8.

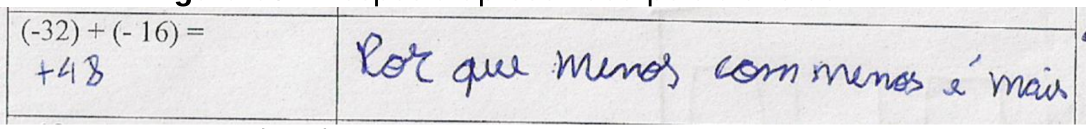
Todavia, esses exemplos se deparam com um obstáculo, quando se tenta explicar a multiplicação de dois números negativos. Nesse sentido, Moretti (2012) nos apresenta o ensino da regra de sinais para o campo multiplicativo, obedecendo ao Teorema de Hankel atendendo a ideia do "princípio de extensão" proposto por Caraça (1963). De acordo com o princípio de extensão, devemos estender a propriedade distributiva dos positivos para o caso dos negativos. E, "[...] com base em abstrações de níveis mais complexos, é possível compreender que se Z é uma ampliação de N, o produto de Z tem que ser uma extensão de N, portanto distributivo com relação à soma, comutativo e associativo" (TEIXEIRA, 1993, p. 65). Esse processo de generalização, que é condizente com as justificativas algébricas formais demonstradas por Hankel, exerce um papel importante no processo de ensino e aprendizagem da regra de sinais.

Em Hillesheim (2013), uma sequência didática foi elaborada e aplicada em que as operações de adição, multiplicação e subtração de números inteiros foram apresentadas de acordo com o "princípio de extensão". Como resultado da aplicação da sequência didática, observamos que o ensino da adição desses números, conduzido por meio de deslocamentos sobre a reta numérica, pode proporcionar aos alunos uma aprendizagem desprendida de regras pré-estabelecidas. Os alunos por meio das movimentações, realizadas na reta numérica, foram capazes de sinalizar a formação de generalizações a respeito das regras de sinais para a adição de números inteiros. Esse fato contribuiu para que a confusão entre as regras de sinais da adição e da multiplicação fossem quase extintas. Mesmo porque, as regras para a adição foram construídas pelos alunos num processo de generalizações por meio dos deslocamentos sobre a reta numérica.

Nesse contexto, a regra de sinais para a multiplicação dos inteiros pode ser apresentada sem nenhum constrangimento. Ela aconteceu num processo natural como uma continuidade da adição. A multiplicação de dois números positivos ou de um número positivo por um negativo seguiu a ideia de deslocamentos sobre a reta. Assim, os alunos, num processo de observação, de experimentação, de tentativas e erros, foram capazes de fazer generalizações, percebendo que a regra de sinais para a multiplicação é a única que preserva a distributividade à esquerda e a direita.

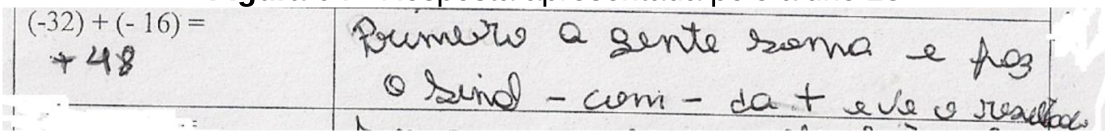
Constatamos, por meio da aplicação de algumas questões a duas turmas do 7º ano, que na turma em que o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração de números inteiros foram conduzidos sem o uso da reta numérica, um índice elevado de erros relacionados à ideia de que “menos com menos dá mais”. Por exemplo, para a questão (–32) + (–16), percebemos diversas respostas +48 e justificativas do tipo:

Figura 03 - Resposta apresentada pelo aluno 06



Fonte: HILLESHEIM (2013)

Figura 04 - Resposta apresentada pelo aluno 28



Fonte: HILLESHEIM (2012)

De um modo geral, os alunos dessa turma encontraram muita dificuldade para justificar as operações que foram solicitadas. Nenhum aluno apresentou, como justificativa para a adição, o deslocamento sobre a reta numérica. Todas as justificativas estiveram pautadas no modelo comercial ou em regras pré-estabelecidas. Essas regras foram evocadas, nas justificativas dos cálculos, como uma “poção mágica” ou como uma “lei” que precisa ser seguida, mesmo sem ser compreendida.

No ensino em que modelo comercial se faz presente, a congruência semântica arrasta o aluno para uma espécie de “codificação”, em que os números negativos são associados a dívida/ perda e os números positivos a lucro/ganho. Assim,

> Um aluno que não percebe a atitude intelectual exigida em matemática faz espontaneamente da congruência semântica, a condição necessária e às vezes suficiente da equivalência referencial. Ele encontrará e ficará satisfeito com as substituições semanticamente congruente; por outro lado, ele irá resistir às substituições que não são semanticamente congruentes, mas referencialmente equivalentes (DUVAL, 2012, p. 100).

Essa afirmação de Duval nos ajuda a compreender as dificuldades que os alunos apresentam em certos tipos de questões. No caso dos números inteiros, se a adição e a subtração forem plantadas sob a perspectiva do modelo comercial, isso poderá aumentar ainda mais as dificuldades percebidas por esses alunos, quando se trata de situações em que a congruência semântica se destaca da equivalência referencial, como, por exemplo, na multiplicação de dois números negativos ou mesmo em outras situações.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente artigo é uma tentativa de mostrar, em que medida o ensino dos números relativos, conduzido por meio do “princípio de extensão”, opondose ao modelo da metáfora comercial, pode contribuir para minimizar os problemas enfrentados pelos alunos na multiplicação desses números. Colhendo os frutos da intervenção didática, construída e aplicada durante a nossa pesquisa de mestrado e observando os resultados do teste aplicado a duas turmas de 7º ano, incluindo a nossa turma de intervenção, percebemos diferenças significativas na aprendizagem desses alunos.

Essas diferenças nos levam a acreditar que a compreensão da adição de números inteiros por meio de deslocamentos sobre a reta numérica pode contribuir para o ensino das propriedades multiplicativas desses números. Segundo as justificativas apresentadas, pelos alunos no teste, para o cálculo das operações de adição, multiplicação e subtração, podemos aferir que os alunos que tiveram o ensino dessas operações por meio do "princípio de extensão" não demostraram conflito entre a regra de sinais da adição e da multiplicação, ao contrário dos demais. Isso nos indica que o ensino dessas operações, orientado por esse princípio, podem amenizar as confusões entre as regras de sinais da adição e da multiplicação com números relativos e contribuir para que os números inteiros não sejam concebidos pela via do modelo comercial.

Por meio das respostas obtidas pela aplicação do teste, percebemos que as atividades que exigiram uma conversão de registros nem sempre foram resolvidos com sucesso. Isso porque as situações de ensino, em que a congruência semântica se destacou da equivalência referencial, segundo Duval (2012), contribuíram para um número menor de acertos em relação aos casos em que a congruência semântica e a equivalência referencial conduziam aos mesmos resultados.

Entretanto, não há porque fugir de problemas sem congruência semântica, são eles, em geral, oriundos de operações de conversões, que estão na base da ideia de aprendizagem: "Para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto mesmo não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas desse objeto e coordená-las" (DUVAL, 2004, p. 69).

Propor diferentes formulações coordenadas para um mesmo tipo de problema é o caminho que ajuda a diminuir as dificuldades encontradas pelos alunos, quando não há congruência semântica entre a sua formulação e as operações ou expressões utilizadas na sua solução. Assim, a variedade de registros utilizados para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação com números relativos, poderá contribuir para que o aluno tenha uma ideia global a respeito do objeto matemático, permitindo, desse modo, que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANJOS, M. F. **A difícil aceitação dos números negativos**: um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1776-1862). Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2008. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_86.pdf>. Acesso em: 10 out. 2012.

ASSIS NETO, F. R. de. Duas ou três coisas sobre o “menos vezes menos dá mais”. Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática: Livro de Resumos, 1995, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 1995.

BORBA, R. O que pode influenciar a compreensão de conceitos: o caso dos números inteiros negativos. In: BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Orgs). **A pesquisa em educação matemática:** repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, 2009. p. 58-102.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1963.

CID, E. Obstáculos epistemológicos em la ensenãnza de los números negativos. In: JORNADAS DEL SEMINÁRIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EM DIDÁTICA DE LÃS MATEMÁTICAS, 15., 2000. Anais eletrônico. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf>. Acesso em: 15 set. 2012.

COQUIN-VIENNOT, Danièle. Complexité mathématique et ordre d’aquisition : une hierarchie de conceptions à propos des relatifs. **RDM**. v. 6, n. 2.3, 1985.

COSTA, M. A. **As ideias fundamentais da matemática e outros ensaios**. São Paulo, SP: Grijalbo, Ed. USP, 1971.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. **La aritmética y el libro sobre los números poligonales.** Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif da la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticas y aprendizajes intelectuales**.** Colombia: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática.** 2. ed. São Paulo: Papirus, 2005. p. 11-33.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012. Disponível em: < http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat>. Acesso em : 14 set. 2012

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM,** v.2., n.3, 1981.

HILLESHEIM, S. F. **Os números inteiros relativos em sala de aula**: perspectivas de ensino para a regra de sinais. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e tecnológica) – Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina, 2013.

LINS, R. C; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papirus, 1997.

MARANHÃO, M. C. S. A; CAMEJO, A; MACHADO, S. Relatos em torno do cálculo de um aluno do 2º ano do Ensino fundamental. **Zetetiké**, Unicamp, v.

REnCiMa, v.4, n.2, p. 37-56 , 2013
Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013

16, n. 29, 2008. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/revista/index.php/zetetike/>. Acesso em: 25 set. 2012.

MORETTI, D. M; BORBA, R. E. S. R. O que os alunos já sabem antes da introdução formal ao conceito de número inteiro relativo. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 1 CD ROM.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012. Disponível em:

< http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC36384011468.pdf>. Acesso em: 10 mai. 2012.

NASCIMENTO, R. A. Explorando a reta numérica para identificar obstáculos em adição e subtração de números inteiros relativos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO

MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. **Anais...** 1 CD-ROM.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posição**, v. 4, n. 1, março, 1993. Disponível em:

< http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/edicoes/home67.html>. Acesso em: 10 set. 2011.

Submissão: 14/08/2013. Aceite: 20/11/2013