

ANÁLISE DE ERROS EM SOLUÇÕES DE QUESTÕES DE ALGEBRA: UMA PESQUISA COM ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

ERROR ANALYSIS IN SOLUTIONS OF ALGEBRA QUESTIONS: A RESEARCH WITH ELEMENTARY SCHOOL STUDENTS

Lauren Darold Brum

Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática
Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS
E-mail: lauren-d@bol.com.br

Helena Noronha Cury

Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática
Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, RS
E-mail: curyhn@unifra.br

Resumo

Neste artigo, são apresentados resultados parciais de uma investigação desenvolvida com o objetivo de analisar erros cometidos por estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões algébricas. Para embasar a investigação, foram buscados autores que têm discutido o ensino de Álgebra e as dificuldades encontradas pelos alunos. A metodologia empregada foi a análise de conteúdo dos erros, dividida em três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Participaram da pesquisa 23 alunos de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de um município do Rio Grande do Sul. Os estudantes resolveram cinco questões de Álgebra e suas respostas foram analisadas, classificadas segundo o modelo de Movshovitz-Hadar e colaboradores e descritas no texto. Ainda foi apresentado um quadro-síntese com o número de erros de cada tipo, em cada questão. Pelos resultados encontrados, pode-se concluir que os erros técnicos, que envolvem manipulações algébricas, e aqueles que decorrem da passagem da linguagem natural para a Matemática são os mais frequentes.

Palavras-chave: Análise de erros. Álgebra. Ensino Fundamental.

Abstract

In this paper, we present partial results of a research carried out in order to analyze errors made by students in 8th grade of elementary school when solving algebraic questions. To support this research, we sought authors who have discussed the teaching of algebra and the difficulties encountered by students. The methodology employed was content analysis of errors, divided into three phases: pre-analysis, material exploration and processing of results. The participants were 23 students of 8th year of an elementary public school in a city in Rio Grande do Sul. Students solved five algebra questions, that were analyzed, classified according to the model of Movshovitz-Hadar et al. and the responses were

described in the text. We have, too, presented a summary table with the number of errors of each type in each question. By the results, we can conclude that the technical errors that involve algebraic manipulations, and those arising from the passage of natural to mathematics language are the most frequent.

Keywords: Error analysis. Algebra. Elementary school.

Introdução

No mundo de hoje, nesta sociedade permeada por tecnologias e por um crescente acúmulo e troca de informações de vários tipos, é consenso reconhecer que se tornou necessário o desenvolvimento de habilidades de expressão e comunicação por meio de diferentes linguagens e representações. A linguagem algébrica permite ao aluno representar e resolver situações por meio de expressões e equações, desenvolvendo seu raciocínio para solucionar problemas, dentro e fora da escola.

O ensino de Matemática, e em especial o de Álgebra, pode colaborar bastante para a formação de cidadãos responsáveis e críticos. Em primeiro lugar, constituindo-se em um ensino que considere todo aluno como sujeito ativo de seu processo de aprendizagem; que reconheça os seus conhecimentos prévios; que incentive sua autonomia e sua interação com os colegas. Posteriormente, um ensino que procure desenvolver competências matemáticas que contribuam mais diretamente para auxiliar o aluno a compreender questões sociais vinculadas aos conteúdos aprendidos. (BRASIL, 2010).

No ensino de Matemática ocorrem dois efeitos colidentes que provocam, tanto por parte de quem aprende como por parte de quem ensina, por um lado, a comprovação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, o desagrado diante das consequências negativas obtidas com muita frequência em relação à sua aprendizagem. A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo na nossa realidade, pois permite decidir problemas da vida cotidiana e funciona como auxiliar eficaz para a constituição de informações em outras áreas curriculares. O descontentamento revela que há necessidade de reverter o ensino centrado em métodos mecânicos, carente de significados para o aluno.

Usar independentemente o raciocínio matemático, resolver problemas criando estratégias próprias, fazer abstrações com base em situações concretas, comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem empregadas na Matemática e estabelecer conexões entre a Matemática e as outras áreas do conhecimento são algumas das competências gerais, articuladas com competências específicas, associadas aos conteúdos matemáticos visados do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental.

No 8º e 9º anos do Ensino Fundamental destaca-se, nos projetos pedagógicos das escolas, o ensino da Álgebra, sob influência de documentos oficiais e de livros indicados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), com tópicos que vão ser revisitados em muitos outros conteúdos da Matemática ou de outras ciências. Assim, compreender

os conceitos algébricos e suas aplicações é uma forma de articular, no contexto escolar, uma aprendizagem com menor memorização de regras e artifícios matemáticos.

Preocupações com as dificuldades encontradas pelos alunos na aprendizagem de Álgebra, em especial com os processos de abstração e generalização, levaram ao aprofundamento do estudo de erros cometidos por um grupo de estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de analisar tais erros e sugerir estratégias de ensino para superar dificuldades recorrentes.

Para isso, foi feita uma revisão de literatura sobre o tema e, a seguir, a análise e classificação dos erros encontrados após aplicação de um teste composto por cinco questões sobre conteúdos de Álgebra.

A Álgebra e seu ensino

Os procedimentos que fazem parte do cenário algébrico são complexos para muitos estudantes. Para resolver uma equação, fatorar uma expressão algébrica ou simplificá-la, para reduzi-la a uma expressão mais simples, os alunos precisam utilizar conhecimentos e técnicas, bem como realizar manipulações algébricas às vezes sofisticadas. O uso de convenções algébricas, o conceito de variável, o conceito de incógnita, o recurso a determinado produto notável, o uso de letras em Álgebra, a diversidade de situações que se referem a variável e incógnita indiferentemente, comprometem, muitas vezes, a compreensão dos estudantes.

Muitas pesquisas têm se reportado ao ensino de Álgebra e às dificuldades encontradas pelos alunos em sua aprendizagem. Neste item, são apresentadas algumas considerações sobre o tema, com o apoio de autores que vêm discutindo diferentes aspectos.

De acordo com Neves (1995), muitos alunos e professores acreditam que a Álgebra se encontra apenas dentro da sala de aula, nas tarefas escolares, e compreendê-la significa trabalhar com fatos já constituídos. Desse modo, a Álgebra tem escasso significado para a maior parte dos alunos, que não conjecturam sobre sua amplitude. Um dos aspectos que pode colaborar para modificar essa realidade, examinada por Neves (1995), é o enfoque da história da Álgebra no desenvolvimento primitivo da Matemática, para que o futuro professor possa abranger sua construção, saber lidar com os conceitos e ter fundamentos teóricos para preparar atividades significativas para os alunos, de modo que estas permitam desenvolver os conceitos a partir de seus próprios conhecimentos e a partir da história da Matemática.

Segundo Carvalho (2005), o ensino em Matemática está dividido em três componentes básicos, as partes dos conceitos, da manipulação e da aplicabilidade, fazendo, assim, com que o estudante trabalhe pouco seu raciocínio. Quando o aluno é chamado para resolver problemas importantes, que podem despertar o seu interesse, muitas vezes não é dada continuidade ao trabalho, sendo apenas apresentada uma lista de exercícios repetitivos. Essas dificuldades são derivadas de um ensino que privilegia a

propagação de conceitos, a aplicação de fórmulas, que o aluno decora sem compreender e não lhe permitem que desenvolva e crie seus próprios conceitos sobre os temas estudados.

A Álgebra tem um lugar de importância nos currículos. Sua relevância pode ser observada pela ênfase expressiva colocada nos conteúdos algébricos dos programas escolares. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Álgebra é um conteúdo que desenvolve a capacidade de abstração e generalização e é uma importante ferramenta para resolver problemas, deixando de ser algo mecânico, para levar o estudante a pensar e construir o pensamento algébrico (BRASIL, 1998). Por esse motivo, é importante que professores realizem trabalhos propondo situações em que o aluno seja capaz de estabelecer noções algébricas através de atividades significativas e que tenham relações com o seu cotidiano.

No Ensino Fundamental, a Álgebra é uma das áreas da Matemática que recebe um extenso enfoque. Sua apresentação é simples e reduzida nos primeiros anos e somente no 8º ano do Ensino Fundamental é trabalhada com maior espaço no conteúdo programático; a partir deste momento ocorre a necessidade de um raciocínio de natureza abstrata, tornando muitas vezes essa área da Matemática uma das mais temidas pelos estudantes.

Mesmo assim, em algumas escolas, nos anos finais do Ensino Fundamental, a Álgebra ainda é abordada de forma repetitiva e mecânica. Para muitos educadores, a principal e única ferramenta de trabalho é o livro didático, que trata, muitas vezes, apenas de exercícios que solicitam a aplicação de regras e conceitos alinhados (SOUSA, 2004). De certa forma, a Álgebra é trabalhada como algo inativo, sem relação com o ambiente social do aluno, sem analogia com os movimentos vivenciados habitualmente, como se não fizesse parte da história da Matemática, ou seja, com uma abordagem distante e tradicional.

Booth (1995) assegura que os alunos, em sua maioria, exibem problemas em situações algébricas, não por dificuldades com seu enunciado, mas pelo não entendimento da linguagem da Álgebra. Ainda conforme Booth (1995, p. 35), “o uso de métodos informais em aritmética pode também ter implicações na habilidade do aluno para estabelecer (ou compreender) afirmações gerais em Álgebra”.

Segundo o autor, a Álgebra

[...] não está separada da aritmética; na verdade, é, em muitos aspectos, a “aritmética generalizada”. E nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em Álgebra poderá ser afetado. (BOOTH, 1995, p. 33).

Ponte, Branco e Matos (2009, p.74) listam algumas dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra, tais como: “Ver a letra como representando um

número ou um conjunto de números; pensar numa variável como significando um número qualquer; atribuir significado às letras existentes numa expressão [...]”.

O desenvolvimento da linguagem algébrica, como já foi mencionado, se dá pelo uso das ideias derivadas da Aritmética, notando-se que as dificuldades se originam na maneira como a Álgebra é informada: sem fazer menções às oscilações do cotidiano e da vida e como algo inteiramente novo para quem aprende.

Kieran (2004) considera que os livros-texto de Álgebra enfatizam, em geral, os aspectos transformacionais e que a compreensão dos conceitos algébricos parece ficar separada do desenvolvimento das habilidades manipulativas. O aumento das pesquisas sobre ensino de Álgebra, segundo esta autora, “nos encoraja a pensar em compreensão técnica e conceitual como inter-relacionadas, ao invés de opostas.” (p. 30).

Um aspecto importante que bloqueia a concepção algébrica é o conceito de generalização. Para Davidov (1988, p.101), “a generalização se caracteriza como via fundamental para a formação de conceitos escolares”. É o conhecimento visível que acorda o aluno para as abstrações da Aritmética. Assim, o pensamento algébrico abrange abstração, invenção, entrosamento para operacionalidade presente na Aritmética, ideia de equivalência, de variação. Com isso o aluno precisa ser guiado a trabalhar com essas ideias, não conseguindo estabelecer esse tipo de conhecimento por si só, porque não é algo natural.

Buscando identificar e analisar procedimentos e estratégias empregados por alunos de 8ª série do Ensino Fundamental ao resolver questões de Álgebra, Ribeiro (2001) fez uma pesquisa em cuja primeira etapa foram reaplicadas questões do exame SARESP (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) a 20 estudantes de uma escola pública de São Paulo e, em uma segunda etapa, os alunos resolveram questões abertas semelhantes àquelas do SARESP.

Na primeira etapa, o autor identificou problemas na resolução de uma questão que envolvia produtos de expressões algébricas, sendo que um dos erros foi relativo à propriedade distributiva; em outra questão, que envolvia a determinação da área de uma figura cujas medidas dos lados são indicadas por expressões algébricas, também houve muitos erros, alguns deles relacionados a dificuldades algébricas.

Na segunda etapa do trabalho, na aplicação de uma questão que envolvia resolução de equação de primeiro grau, Ribeiro (2001) notou que alguns alunos erraram procedimentos de passagem de uma equação para outra equivalente.

Outro autor que pesquisou o uso da propriedade distributiva foi Dias (2004). Segundo a autora, essa propriedade está presente tanto no campo numérico como no algébrico, fazendo parte de inúmeros conteúdos a serem estudados no decorrer da escolaridade, permitindo ao estudante um trabalho conteudista e cognitivo. Ainda conforme Dias, vale ressaltar que o estudo da propriedade distributiva pode ser visto também como uma forma de permitir ao estudante maneiras novas de raciocinar e de trabalhar matematicamente de forma variada.

Os trabalhos revisados auxiliaram na análise das respostas dos alunos a questões que envolviam conceitos de Álgebra, visto abordarem dificuldades encontradas, de maneira geral, pelos estudantes participantes da pesquisa.

Metodologia da pesquisa

A presente pesquisa é de caráter qualitativo e foi realizada segundo a metodologia de análise de conteúdo dos erros (CURY, 2007), baseada em Bardin (1979) e constando de três fases: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. Na pré-análise, os estudantes foram indicados por letras, para preservar sua identidade. Em seguida, todas as respostas a cada questão foram fotocopiadas, para permitir sua organização em sequência, facilitando a correção e a análise.

A segunda fase da análise, de exploração do material, corresponde à classificação das respostas em corretas, parcialmente corretas, incorretas e em branco. As respostas incorretas formaram o *corpus* para a análise e categorização. Já na fase de tratamento dos resultados, foram descritos os erros encontrados em cada categoria, bem como elaboração de quadro-síntese dos resultados quantitativos.

Foi empregado o modelo de classificação de erros de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), que compreende as seguintes categorias: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência logicamente inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erros técnicos. Nesta pesquisa, não foram consideradas as categorias “inferência logicamente inválida” e “solução não verificada”, visto que os problemas propostos aos alunos não envolviam inferências.

Baseados na classificação de Movshovitz-Hadar e colaboradores (1987), as classes relacionam-se:

- I) ao uso errado dos dados: nesta classe são considerados os erros relacionados com discrepâncias entre os dados do problema e a forma como foram utilizados. Nesta pesquisa, por exemplo, os alunos trocam o conceito de área por perímetro causando total alteração no objetivo da atividade proposta;
- II) à linguagem mal interpretada: esses erros relacionam-se à tradução incorreta dos itens de uma para outra linguagem, como, por exemplo, passagem da língua natural ou figural para a linguagem matemática;
- III) à definição ou teorema distorcido: nesta categoria, são incluídos os erros que se relacionam a definições ou propriedades que não se aplicam na questão proposta ao aluno;
- IV) a erros técnicos: nesta classe, estão contidos os erros computacionais, como os de manipulação algébrica, que, nesta pesquisa, foram representados, por exemplo, por: multiplicação das variáveis e soma dos coeficientes; troca de adição de fatores semelhantes por potências; multiplicação dos coeficientes e indicação do produto das variáveis; troca da

adição de monômios por multiplicação ou de multiplicação por adição; uso incorreto da propriedade distributiva; adição de variável com constante, entre outros.

Além desses tipos de erros, ainda foi criada a classe V, relativa à simples cópia dos dados, quando os alunos transcreveram para o papel os dados, não mostrando a solução proposta. Também foi criada a classe VI, composta por erros que não foram compreendidos pelas pesquisadoras, e a classe VII, de erros por distração, quando o estudante resolve corretamente a questão, mas esquece de indicar a resposta ou copia mal os dados.

Na classificação, foi levado em conta o primeiro erro cometido na resolução, mas, na maior parte das vezes, o estudante continuou a solução, cometendo erros de outros tipos. Assim, a contagem final leva em conta o fato de que pode haver mais de um tipo de erro em uma mesma questão.

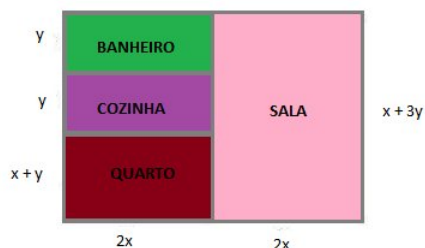
Como instrumento da pesquisa, foi elaborado um teste, composto de cinco questões, adaptadas de problemas de livros didáticos sugeridos pelo Programa Nacional do Livro Didático. A investigação foi realizada em duas etapas, sendo a primeira desenvolvida em uma escola pública do Município de Tupanciretã, Rio Grande do Sul, com 23 alunos de uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental. A segunda etapa foi realizada em uma escola privada, também de Tupanciretã, com uma turma de 10 alunos do mesmo ano.

Pelas restrições de espaço, neste artigo são apresentados apenas os resultados da primeira etapa.

Apresentação dos resultados

Para apresentar as soluções dadas pelos alunos, são indicadas cada questão do teste e as respostas incorretas, segundo as classes apontadas por Movshovitz-Hadar e colaboradores, bem como as que foram posteriormente criadas. É utilizada a numeração romana das classes citadas no item anterior. Nem todas as classes foram identificadas nas respostas a uma determinada questão e, em cada uma delas, optou-se por apresentar e comentar, em especial, os tipos de erro que tiveram maior ocorrência.

A primeira questão teve o seguinte enunciado: *A planta de uma casa, em que os cômodos têm a forma de retângulos, está ilustrada na figura e as dimensões dos cômodos estão indicadas na planta. Determine:*



- a) a área da sala; b) a área do quarto; c) a área do banheiro e da cozinha juntos;
d) a área da casa

Erro do tipo I: este tipo de erro, neste teste, caracterizou-se pela troca da área por perímetro. Como exemplo, tem-se a resolução do aluno G, na Figura 1.

Figura 1- Erro do tipo I, aluno G.

$$\begin{aligned}x + 3y + 2x &= 5xy \\x + y + 2x &= 2xy \\2y + 2x &= 4xy \\x + 3y + 2x + 2x + x + 3y - y &= \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno G, ao se confrontar com a questão, usa os dados de maneira equivocada, pois troca área por perímetro, modificando todo o contexto, além de cometer outros erros operacionais.

Essa troca de área por perímetro também foi encontrada por Gil (2008), em uma questão semelhante à proposta nesta pesquisa, na qual 25% dos alunos indicaram o perímetro ao invés da área da figura.

Erro do tipo IV: erro técnico, em que o aluno não apresenta corretamente as operações algébricas, envolvidas na questão. Nesta pesquisa, foi nesta questão que ocorreu o maior número de erros desse tipo. Têm-se vários exemplos, como nas respostas dos alunos A, E, F e M, nas Figuras 2, 3, 4 e 5.

Figura 2- Erro do tipo IV, aluno A.

$\begin{aligned}Sala: 2rc \cdot (rc + 3Y) \\ S = 3rc + 3Y\end{aligned}$	$\begin{aligned}Banheiro: 2rc \\ S = X \cdot 2rc \\ S = 2rcY\end{aligned}$	$\begin{aligned}Cozinha \\ S = Y \cdot 2rc \\ S = 2rcY \\ 2rcX + 2rcY = \\ 4rcY\end{aligned}$
---	--	---

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno A, no item a, mostra não saber usar a propriedade distributiva e, além disso, troca multiplicação por adição.

Figura 3- Erro do tipo IV, aluno E.

$a) S = 2x \cdot x + 3y = 2x + 3y //$
 $b) S = x + y \cdot 2x = 3x + y //$
 $c) S = y + y \cdot 2x = 2y + 2x //$
 $d) 2x + 3y + 3x + y + 2y + 2x = 7x + 6y //$

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno E, ao se deparar com a questão, apresenta, nos itens b, c d, o erro de troca de multiplicação de monômio por adição, além de não usar corretamente a propriedade distributiva.

Já o aluno F, cuja solução está apresentada no item b da Figura 4, adiciona monômios que não são semelhantes e, no item c, troca adição de y com y pela potência y^2 .

Figura 4- Erros do tipo IV, aluno F.

$a) S = b \cdot H$
 $S = 2x(x+3y)$
 $S = 2x + 6y$
 $S = 8x^2y$

$b) S = b \cdot H$
 $S = 2x(x+y)$
 $S = 2x^2 + 2xy$
 $S = 4x^2y$

$c) S = b \cdot H$
 $S = 2x(y+y)$
 $S = 2x \cdot y^2$

$d) S = b \cdot H$

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno M, cuja solução está representada na Figura 5, após ter acertado o item a, não consegue utilizar a propriedade distributiva e troca adição por multiplicação. Já no item d, indica a área S como b.h, mas escreve o perímetro.

Figura 5- Erros do tipo IV, aluno M.

$$\begin{array}{l}
 \text{a) } S = b \cdot h \\
 S = 2x(x+y) \\
 2x^2 + 2xy \\
 \text{c) } S = b \cdot h \\
 S = 2x \cdot (y) + 2x \cdot (y) \\
 S = 2xy + 2xy \\
 S = 4xy \\
 \text{b) } S = b \cdot h \\
 S = 2x(x+y) \\
 2x^2y \\
 \text{d) } S = b \cdot h \\
 S = x + 3y + 2x + x + y + y + 2x + y \\
 S = 2x^2 + 6xy + xy + y^2 + 2xy \\
 8xy + xy^2 + 2xy
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesses exemplos, vê-se que os alunos têm muita dificuldade em aplicar corretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição. Este resultado está de acordo com o encontrado por Ribeiro (2001) na primeira etapa de sua pesquisa, em que os alunos, nos cálculos desenvolvidos, mostraram dificuldades na propriedade distributiva.

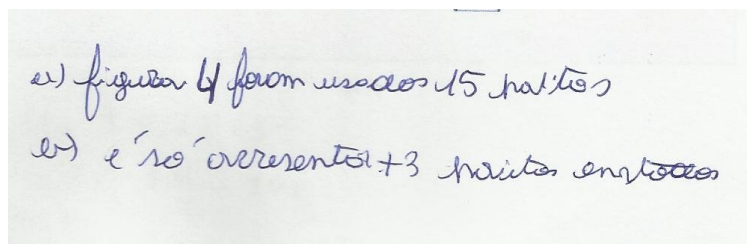
A segunda questão teve como enunciado: *Carlos montou foguetes usando palitos. Observe os palitos e a sequência formada: na figura 1, foram usados 6 palitos, na figura 2, foram usados 9 palitos e na figura 3, 12 palitos. Escreva a quantidade de palitos que foram usados para construir a figura 4 e, depois, escreva uma regra para calcular a quantidade de palitos necessária para construir qualquer uma das figuras.*



Erro do tipo II: nesta questão, esse tipo de erro se caracterizou pelo fato de não haver tradução da linguagem natural para a linguagem matemática, para criar uma regra para o caso geral. Como por exemplo, têm-se as resoluções dos alunos D e E, nas figuras 6 e 7.

Nas resoluções, apresentadas abaixo, nota-se que esses alunos sabem escrever, na linguagem natural, que a regra é somar 3 a cada número de palitos obtidos, mas não a expressam em linguagem matemática.

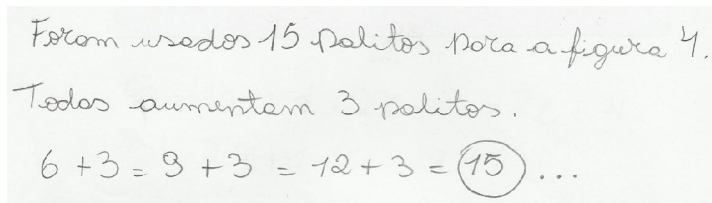
Figura 6 - Erro do tipo II, aluno D.



a) figura 4 foram usados 15 palitos
b) e os seguintes +3 palitos em todos

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 7- Erro do tipo II, aluno E.



Foram usados 15 palitos para a figura 4.
Todos aumentam 3 palitos.
 $6 + 3 = 9 + 3 = 12 + 3 = 15 \dots$

Fonte: Dados da pesquisa

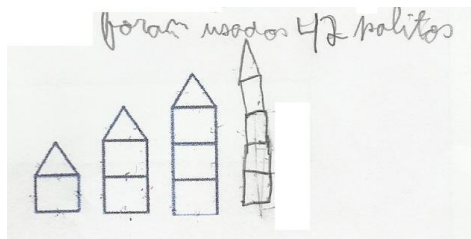
Os alunos mencionados apresentaram a resposta corretamente, porem não souberam generalizar, evidenciando que ainda não houve a compreensão da generalização que permite escrever em linguagem matemática.

Gil (2008) usou uma atividade semelhante a esta no seu trabalho com alunos de 7ª série do Ensino Fundamental e verificou que cerca de 80% deles erraram ou não responderam à questão. Segundo a autora, a dificuldade refere-se à abstração das regularidades, o que impossibilita o aluno de representá-las por meio da linguagem algébrica.

Post, Behr e Lesh (1995) alertam para o fato de que o raciocínio e o conhecimento algébricos envolvem diferentes formas de representação, tais como desenhos e diagramas. Assim, se os alunos não são acostumados a fazer a passagem de uma forma para outra, ou seja, se não costumam generalizar padrões geométricos, expressando-os em linguagem algébrica, podem entender o processo, mas não conseguem representá-lo.

Erro do tipo III: nesta pesquisa, esse tipo de erro consiste em distorcer o que se pede no problema, quando o aluno usa operação ou propriedade que não se enquadra na questão, como a resposta do estudante I, indicada na Figura 8.

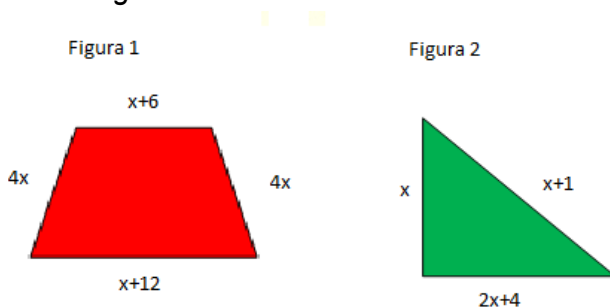
Figura 8 - Erro do tipo III, aluno I.



Fonte: Dados da pesquisa

O aluno I distorceu a questão quando somou todos os palitos para a construção do foguete, pois não era isso que o enunciado da questão pretendia.

A questão 3 teve como enunciado o seguinte: *Determine a diferença entre o perímetro da figura 1 e o da figura 2:*



Erro do tipo IV: na questão 3, o erro técnico surgiu de várias maneiras. Alguns alunos acertaram o cálculo dos perímetros, mas erraram a diferença. É o caso do aluno E¹, que escreveu, corretamente, $10x+18-(4x+5)$, mas completou a resposta indicando $10x+18-9x$, tendo somado coeficiente da variável com constante. Ao finalizar, o aluno ainda trocou subtração por adição, finalizando a resposta com a expressão $19x-18$.

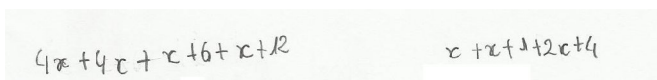
A adição de coeficiente de variável com constante ocorreu muitas vezes nesta questão, como pode ser visto na resposta do aluno P, que escreveu:

$$\begin{aligned} 4x+x+6+4x+x+12 \\ 10x+16x \\ 26x \end{aligned}$$

Portanto, parece ter errado o cálculo de $6+12$ e ainda indicou a soma como um monômio.

Erro do tipo V: nesta pesquisa, esse erro consiste em somente copiar os dados do problema, como, por exemplo, na resposta do aluno V, apresentada na Figura 9.

Figura 9 - Erro do tipo V, aluno V.

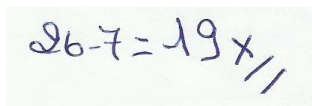


Fonte: Dados da pesquisa

Erro do tipo VI: nesta pesquisa, classifica-se esse tipo de erro quando não é possível compreender a solução apresentada. Como exemplo, temos a resposta do aluno H, representada na Figura 10.

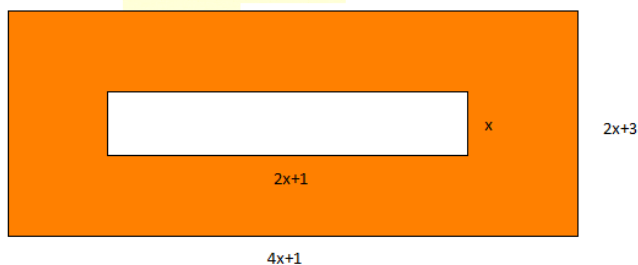
¹ Em alguns casos, não foi possível escanear a resposta, porque não ficou legível na folha de prova.

Figura 10 - Erro do tipo VI, aluno H.


$$26-7=19x //$$

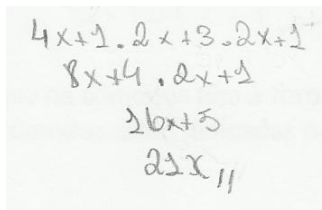
Fonte: Dados da pesquisa

A questão 4 teve como enunciado: *Encontre a área da região colorida, expressando-a em função de x:*



Erro do tipo III: esta classe de erro, nesta pesquisa, mostra que o estudante não interpreta bem a questão, como, por exemplo, o aluno N, que multiplica todas as medidas dos lados, conforme está representado na Figura 11.

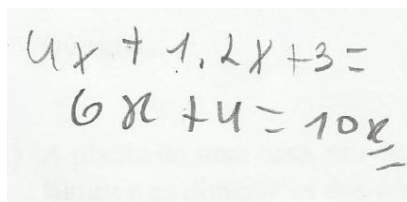
Figura 11- Erro do tipo III, aluno N.


$$\begin{aligned} 4x+1 \cdot 2x+3 &= 2x+1 \\ 8x+4 \cdot 2x+1 \\ 26x+5 \\ 22x // \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Erro do tipo IV: nesta questão, os erros do tipo técnico foram os mais numerosos. Como exemplos, têm-se as soluções dos alunos D e R, indicadas nas Figuras 12 e 13.

Figura 12- Erro do tipo IV, aluno D.


$$\begin{aligned} 4x+1 \cdot 2x+3 &= \\ 6x+4 &= 10x // \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno D, tendo colocado um “ponto” entre os dois binômios, parece ter entendido que a área é o produto das medidas da base e da altura, mas não soube utilizar a

propriedade distributiva (talvez pela falta de parênteses) e adicionou os termos semelhantes.

Ponte, Branco e Matos (2009) comentam que a adição algébrica envolve a necessidade de eliminar parênteses e que é conveniente mostrar aos estudantes, no início do ensino de Álgebra, sua importância na simplificação de expressões, especialmente quando há um sinal de menos, como em $3+x-(4+2x)$.

Figura 13- Erro do tipo IV, aluno R.

$$\begin{array}{l}
 4x + 1 \cdot 2x + 3 = \\
 6x^2 + 3 \quad 2x + 1 \cdot x \\
 6x^2 + 3 \cdot 2x^2 + x \\
 - 2x^2 + 2 = \\
 \hline
 4x^2 + 1
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, R também não soube usar a propriedade distributiva, pois somou os coeficientes de x , no primeiro caso.

Erro do tipo VI: nesta pesquisa, essa classe compreende aquelas soluções incompreensíveis; no exemplo tem-se o aluno C, cuja solução é apresentada na Figura 14.

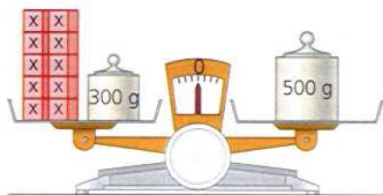
Figura 14- Erro do tipo VI, aluno C.

$$\begin{array}{l}
 2x + 3 - 2x + 1 - 4x + 1 \\
 1x - 3x - 5x \\
 2x - 2x - 1 - 4x - 1 \\
 x - x - x
 \end{array}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nestas respostas, nota-se novamente que os estudantes têm dificuldades semelhantes às encontradas por Ribeiro (2001), quando analisou as soluções dos alunos a um problema que envolvia área de uma figura.

A questão 5 apresentou o seguinte enunciado: *Em uma visita à Feira de Ciências da escola de Maria, alguns estudantes realizaram um experimento no qual o equilíbrio dos pratos da balança mostra um cálculo para encontrarmos os valores desconhecidos. Assim, todos que passavam pelo trabalho desses estudantes puderam resolver e descobrir o valor de cada quadradinho colocado em um dos lados da balança. E você, sabe resolver? Mostre seu cálculo.*



Erro do tipo II: nesta pesquisa e nesta questão, a dificuldade de equacionar o problema, ou seja, de passar da linguagem natural para a algébrica, é a mais presente, como os exemplos das respostas dos alunos B e D, representadas nas Figuras 15 e 16; nelas se vê que houve compreensão da questão, mas a resposta foi calculada sem que o estudante expressasse em uma equação a situação.

Figura 15 - Erro do tipo II, aluno B.

As caedras vale 20.
 que 20×10 da 200.
 que equilibrio da balança.

Fonte: Dados da pesquisa

O aluno E, cuja resposta está representada abaixo, indicou todos os passos e até “fez a prova”, mas não expressou a equação na linguagem matemática.

Figura 16 - Erro do tipo II, aluno E.

Cada quadrinha vale 20
 $20 \cdot 10 = 200$ → Número de quadrinhas
 $200 + 300 = 500g$ // ou
 $500 - 300 = 200$
 $200 \div 10 = 20$
 $20 + x =$

Fonte: Dados da pesquisa

Esta questão 5 foi a que apresentou maior número de respostas em branco, mostrando que o problema não foi compreendido pela maior parte dos alunos.

A seguir, é apresentado um quadro com o número de erros de cada tipo, em cada questão:

Quadro 1 – Número de erros de cada tipo, por questão.

Tipos de erros	Questões					
	1	2	3	4	5	Total
I	3	0	0	6	0	9
II	0	11	0	0	6	17
III	0	2	0	1	1	4
IV	18	0	17	13	0	48
V	1	0	2	0	0	3
VI	2	0	1	1	0	4
VII	1	0	3	0	0	4

Por esse quadro, é possível verificar que os erros dos tipos II e IV são os que tiveram maior incidência. Efetivamente, os erros técnicos, que envolvem a manipulação algébrica, são muito frequentes, além dos erros que envolvem a passagem da linguagem natural ou figural para a matemática, como é o caso da generalização de um determinado padrão.

Considerações Finais

Esta pesquisa foi realizada com o objetivo de analisar erros cometidos por estudantes de 8º ano do Ensino Fundamental na resolução de questões algébricas. Os resultados apontam as maiores dificuldades dos estudantes participantes, que geraram os tipos de erros classificados como II e IV.

O erro do tipo II refere-se às dificuldades de tradução da linguagem natural ou figurada para a linguagem matemática. Na questão 2, esse erro surgiu no momento em que os alunos, mesmo tendo entendido a regra para a formação da sequência, não conseguiram expressá-la em linguagem matemática.

Na questão 5, a dificuldade maior foi de equacionar o problema, passando da linguagem natural, apoiada na figural, para uma equação que pudesse ser resolvida. Mesmo os alunos que acertaram, obtiveram a resposta por deduções, sem o apoio de uma equação formal.

O erro do tipo IV refere-se a dificuldades técnicas, em especial à falta de prerrequisitos, relacionados à propriedade distributiva, à troca de operações e à adição de termos não semelhantes. Na questão 1, por exemplo, ainda que muitos alunos tenham compreendido o que era solicitado, ou seja, tenham usado o contexto geométrico para obter as expressões das áreas dos cômodos da casa, não conseguiram obter a resposta correta por causa dos erros na manipulação algébrica.

Na questão 3, novamente surge o erro do tipo IV, quando o aluno soma coeficiente da variável com a constante ou erra o cálculo da diferença por não ter trocado o sinal dos termos dentro de parênteses, antecedido por sinal de menos. Na questão 4, o erro se faz presente nas dificuldades com a propriedade distributiva.

Ainda que a amostra seja pequena, os resultados mostram que esses estudantes ainda não desenvolveram o pensamento algébrico, pois não sabem expressar abstrações e generalizações provenientes de regularidades e padrões (LINS; GIMENEZ, 1997; MODANEZ, 2003). Também fica clara a observação de Gil (2008), sobre a falta de prerrequisitos para resolução de atividades que envolvem Geometria.

Tendo apontado esses resultados, que fazem parte de uma pesquisa de mestrado profissional em ensino de Matemática, sugere-se, por meio do produto da dissertação, que sejam empregados recursos tecnológicos para enfatizar as operações e propriedades necessárias para o estudo da Álgebra no 8º ano do Ensino Fundamental. Em especial, foi usado o software *Hot Potatoes*, para criar problemas e exercícios de Álgebra que podem levar a erros semelhantes aos analisados na pesquisa e a sua superação.

Referências

- BARDIN, L. **Análise de erros**. Lisboa: Edições70, 1979.
- BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo, Atual Editora, 1995. p. 23-37.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília, 1998. Disponível em:
< <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 30 jul. 2012.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros didáticos: PNLD 2011: Matemática**. Brasília, 2010.
- CARVALHO, P. C. P. Fazer Matemática e usar Matemática. In: **Matemática não é problema**. Boletim 06, maio de 2005. Salto para o futuro. Disponível em:
<<http://www.tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/150311Matematicaproblema.pdf>> Acesso em: 30 jul. 2012.
- CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com os erros dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.
- DAVIDOV, V.V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico**. Editorial Progreso, Moscú, 1988.
- DIAS, J. L. **A propriedade distributiva da multiplicação: uma visão diagnóstica do processo**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2004.
- GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de Álgebra**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.
- KIERAN, C. The core of Álgebra: reflections on its main activities. In: STACEY, K.; CHICK, H.; KENDAL, M. (Eds.). *The future of the teaching and learning of Álgebra: the 12th ICMI study*. Dordrecht: Kluwer, 2004. p. 21-33.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

MODANEZ, L. **Das sequências de padrões geométricos à introdução ao pensamento algébrico**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

MOVSHOVITZ-HADAR, N.; ZASLAVSKY, O.; INBAR, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14, 1987.

NEVES, P. **Um estudo sobre o significado, o ensino e a aprendizagem da Álgebra**. 1995. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 1995.

PONTE, J. P. da; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, 2009.

POST, T. R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As ideias da Álgebra**. São Paulo, Atual Editora, 1995. p. 89-103.

RIBEIRO, A. J. **Analisando o desempenho de alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SAESP**. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001.

SOUSA, M. do C de. **O Ensino de Álgebra numa Perspectiva Lógico Histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental**. 2004. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.