

Ciclo de modelagem matemática interpretado à luz de estratégias heurísticas dos alunos

Lourdes Maria Werle de Almeida¹

Karina Alessandra Pessoa da Silva²

Resumo: Neste artigo apresentamos resultados de uma pesquisa em que dirigimos nossa atenção aos chamados ciclos de modelagem matemática, mais especificamente ao duplo sentido das setas usadas nestes ciclos, associando-os às estratégias heurísticas dos alunos quando desenvolvem estas atividades. Nossa base teórica refere-se às etapas, fases ou mesmo estágios relativos ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, bem como a pressupostos relativos às estratégias heurísticas como dispositivos usados pelos alunos para definir encaminhamentos adequados na resolução de um problema. A pesquisa empírica refere-se a uma atividade de modelagem matemática desenvolvida por alunos de uma disciplina de Modelagem Matemática em um programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma universidade pública. Uma descrição narrativa de falas e gestos, bem como o relatório e uma apresentação dos resultados, realizada por um grupo de cinco alunos, nos permitem inferir que setas de duplo sentido no ciclo de modelagem matemática correspondem a um *fazer* ou *percorrer um caminho* em que estratégias heurísticas são dispositivos para prosseguir, regular e avaliar o encaminhamento da atividade.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Heurísticas. Ciclo de Modelagem.

Mathematical modeling cycle interpreted in the light of students heuristic strategies

Abstract: In this article we present results of a research in which we direct our attention to the mathematical modeling cycles, more specifically, to the double direction of the arrows used in these cycles, associating them to the students' heuristic strategies when developing these activities. Our theoretical basis refers to the steps, phases or even stages related to the development of a mathematical modeling activity, as well as the assumptions related to heuristic strategies as devices used by students to define appropriate ways of solving a problem. The empirical research refers to a mathematical modeling activity developed by students of a Mathematical Modeling discipline in a Postgraduate Program in Mathematics Education at a public university. A narrative description of speeches and gestures, as well as the report of the activity and the presentation that the five students of a group made for all the students in the class, allow us to infer that double direction arrows in the mathematical modeling cycle correspond to a *doing* or to a *going through a way* in which heuristic strategies are devices to proceed, to regulate and to evaluate the activity's direction.

¹ Doutora em Engenharia de Produção. Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL). Paraná, Brasil. ✉ lourdes@uel.br  <http://orcid.org/0000-0001-8952-1176>.

² Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Professora do Departamento de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), *campus* Londrina. Paraná, Brasil. ✉ karinasilva@utfpr.edu.br  <https://orcid.org/0000-0002-1766-137X>.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Heuristics. Modelling Cycle.

Ciclo de modelización matemática interpretado a la luz de las estrategias heurísticas de los estudiantes

Resumen: En este artículo presentamos los resultados de una investigación en la que dirigimos nuestra atención a los denominados ciclos de modelización matemática, más específicamente a la doble dirección de las flechas empleadas en estos ciclos, asociándolos a las estrategias heurísticas de los estudiantes a la hora de desarrollar estas actividades. Nuestra base teórica se refiere a los pasos, fases o incluso etapas relacionadas con el desarrollo de una actividad de modelado matemático, así como a los supuestos relacionados con las estrategias heurísticas como dispositivos utilizados por los estudiantes para definir enfoques apropiados para resolver un problema. La investigación empírica se refiere a una actividad de modelización matemática desarrollada por estudiantes de una disciplina de Modelización Matemática en un Programa de Postgrado en Educación Matemática en una universidad pública. Una descripción narrativa de discursos y gestos, así como el informe y una presentación de resultados realizada por un grupo de cinco alumnos al resto de alumnos de la disciplina, permiten inferir que las flechas de doble dirección en el ciclo de modelización matemática corresponden a un *hacer o pasar por un forma* en que las estrategias heurísticas son dispositivos para proceder, regular y evaluar la dirección de la actividad.

Palabras clave: Educación Matemática. Modelización Matemática. Heurística. Ciclo de Modelización.

Introdução

A modelagem matemática, em termos gerais, refere-se à investigação de uma situação da realidade por meio da matemática. Não há indicações de um caminho único para orientar essa investigação. Todavia, a possibilidade de que existe o que alguns autores chamam de *encaminhamento padrão* ou mesmo um *modelo* para desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática tem merecido atenção em pesquisas da área (POLLAK, 2015; BLUM, 2015; SHAHBARI; TABACH, 2016; ÇETINKAYA *et al.*, 2016; BORROMEO FERRI, 2018).

Nesta possibilidade considera-se a modelagem matemática como um processo cíclico e identifica-se o que alguns autores chamam de etapas, outros chamam de fases e outros ainda de estágios do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. As diferentes maneiras de descrever este desenvolvimento, associando e inter-relacionando estas etapas, fases ou estágios por meio dos chamados *ciclos de modelagem* suscitam um debate interessante (ALMEIDA; SILVA, 2015; DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2016; BORROMEO FERRI, 2018; PERRENET; ZWANEVEL, 2012; STENDER, 2018).

O itinerário das discussões relativas a estruturações e finalidades destes ciclos inclui diferentes lentes teóricas e metodológicas. Shahbari e Tabach (2016) argumentam que aprimorar as habilidades dos participantes no fazer modelagem matemática e identificar as ações entre as fases da modelagem implica em reconhecer a natureza cíclica dessas atividades. Galbraith e Stillman (2006), entretanto, ponderam que cada transição entre fases identificadas na atividade de modelagem pode ser considerada uma possível fonte de bloqueio que o aluno precisa ultrapassar. Çetinkaya et al. (2016), neste contexto, discutem estratégias para a superação das dificuldades dos alunos durante a transição de uma etapa para outra, seja na definição do problema, seja na matematização da situação, como sugerem Almeida e Silva (2015).

Conforme indica Stender (2018), o ciclo de modelagem tem, por si só, se tornado um indicativo de como se dá (ou talvez, como deveria se dar) o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Entretanto, como propõe Borromeo Ferri (2018), os alunos modeladores podem não seguir este ciclo e podem ir e voltar nestas etapas quantas vezes julgarem adequado, identificando-se o que a autora denomina de rotas de modelagem.

Visando capturar essa característica das ações dos alunos, um aspecto que tem se evidenciado nas pesquisas e nos usos de diferentes ciclos de modelagem é o sentido das setas usadas pelos autores de esquemas construídos para se referir à natureza cíclica de atividades de modelagem matemática. O que parece se evidenciar nestas setas é justamente a não linearidade das ações dos alunos ao percorrer as etapas do ciclo, podendo vislumbrar-se idas e vindas entre elas pelos modeladores. Entretanto, cabe considerar questões como: movimentos de ida e volta entre etapas acontecem nos diferentes estágios do desenvolvimento da atividade? Como identificar o movimento de ida e vinda dos alunos modeladores?

O presente artigo se propõe a lançar luz sobre o uso de setas de duplo sentido em ciclos de modelagem matemática. Nossa lente teórica para a compreensão desse uso considera as estratégias heurísticas dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem.

Já reconhecidamente presentes na resolução de problemas, as estratégias heurísticas de alunos ao desenvolver atividades de modelagem ainda são pouco exploradas na literatura, embora alguns estudos tenham trazido essa temática à baila (STENDER, 2018; STENDER, 2019; ALMEIDA, 2020).

No âmbito da área de Educação Matemática muito do que se entende por *heurística*

tem sua origem nas ideias de George Pólya, reconhecido como o precursor da resolução de problemas. Pólya (1945), embora não apresente expressamente uma definição de heurística, estabelece uma relação entre a resolução de um problema e a descoberta e as criações dos alunos envolvidos nessa resolução. Para Kilpatrick (1967), todavia, uma heurística pode ser algo não necessariamente definitivo, mas sujeito a alterações ou complementações. No âmbito do ensino e da aprendizagem, Pólya (1945) passa a considerar estratégias heurísticas como ferramentas do pensamento para orientar os alunos na busca de uma solução para um problema.

A problematização relativa às setas de duplo sentido em ciclos de modelagem apresentada no presente texto considera a possibilidade de associar estratégias heurísticas dos alunos ao movimento entre as diferentes etapas realizado pelos alunos quando desenvolvem atividades de modelagem matemática.

Assim, o objetivo do presente artigo consiste em investigar se os duplos sentidos das setas inseridas nos ciclos podem ser associados às estratégias heurísticas dos alunos quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática. Do ponto de vista metodológico, o artigo busca evidências de estratégias heurísticas no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e de como estas podem explicar o uso de setas de duplo sentido em um ciclo de modelagem. O contexto de nossa investigação é um grupo de alunos de uma disciplina de Modelagem Matemática de um curso de Pós-Graduação em Educação Matemática de uma universidade pública brasileira.

Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática refere-se, em termos gerais, à obtenção de uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade, mediada pela construção e validação de modelos matemáticos (BASSANEZI, 2002; BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; GREEFRATH; HERTLEIF; SILLER, 2018; ROBIM, TORTOLA, ALMEIDA, 2014). Modelos matemáticos, neste contexto, são esquemas ou estruturas matemáticas que revelam como aspectos relevantes da situação em estudo podem ser interpretados à luz da matemática. Conforme sugerem Lesh e Harel (2003), os modelos são representações simbólicas da realidade visando trazer à tona regularidades, padrões e uma espécie de possibilidade de interpretação do fenômeno da realidade a que se vinculam.

Almeida (2010) propõe que uma atividade de modelagem matemática tem origem em uma *situação inicial* em que se identifica um problema, e tem como ponto de chegada

uma *situação final* em que uma solução para este problema é apresentada.

No caminho entre estas situações, identifica-se um conjunto de procedimentos que são associados a etapas, fases ou simplesmente estágios do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Duas características são comuns neste encaminhamento: os procedimentos dos modeladores não são pré-definidos; às atividades associa-se uma estrutura cíclica (BLUM, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BASSANEZI, 2002, MEYER, 2020).

A finalidade do ciclo associa-se então à intenção de apresentar uma versão idealizada do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática no sentido de caracterizar um encaminhamento padrão para essas atividades. Segundo Greefrath (2020), essa versão idealizada é por si só um *modelo* de como se dá o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A estruturação dos chamados ciclos de modelagem, todavia, acompanha a própria estruturação da modelagem na Educação Matemática. Nas últimas décadas a relevância destes ciclos para o ensino e a aprendizagem da modelagem matemática tem sido investigada tanto teoricamente quanto em pesquisas empíricas (BORROMEO FERRI, 2006; PERRENET; ZWANEVELD, 2012; GALBRAITH, 2012; ALMEIDA; SILVA, 2015; BORROMEO FERRI, 2018; DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2016).

Conforme sugere Borromeo Ferri (2018), os ciclos para além de um esquema teórico que caracteriza uma atividade de modelagem matemática, são também um instrumento de aprendizagem para os alunos e um instrumento de diagnóstico para os professores.

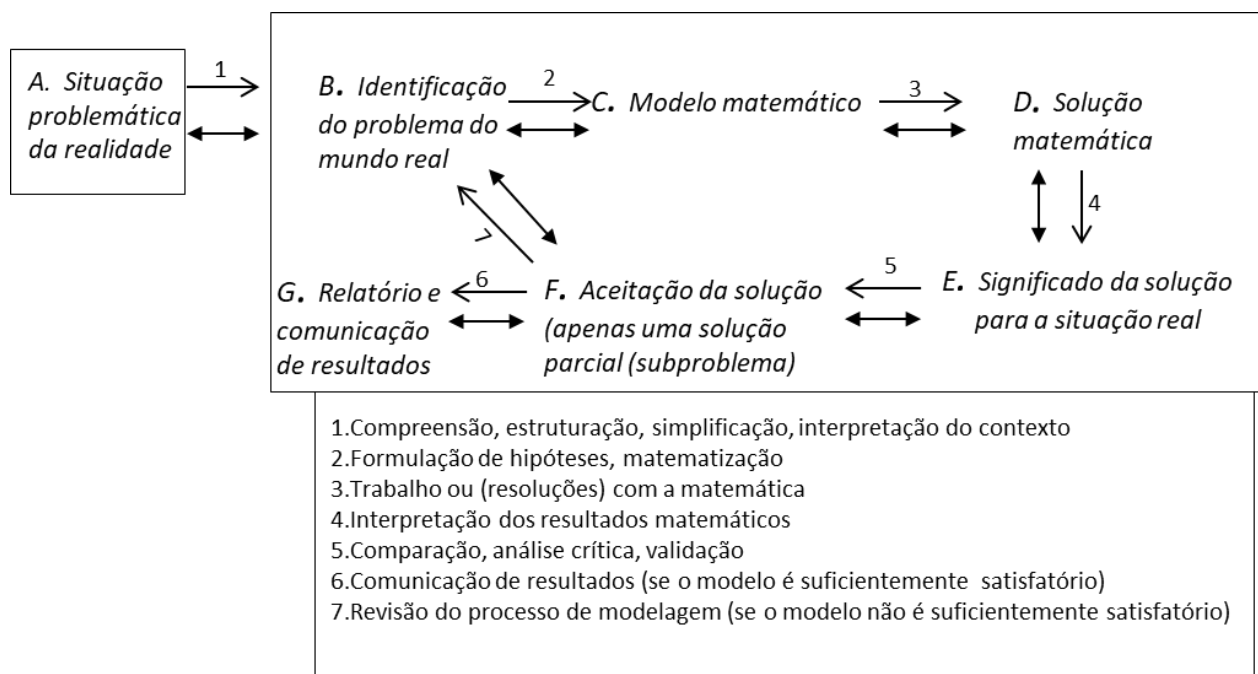
A partir da estruturação de um ciclo em que as etapas da modelagem matemática tinham como finalidade apenas elucidar relações entre matemática e realidade, como é o caso do ciclo apresentado por Pollak (1979), aos esquemas cíclicos foram incluídos elementos cada vez mais detalhados com relação à modelagem matemática, de modo que passaram, inclusive, a incluir processos cognitivos dos modeladores, como é o caso do ciclo apresentado em Borromeo Ferri (2006).

Amplamente reconhecida, a estruturação de ciclos de modelagem, além de se propor a indicar possíveis etapas para o desenvolvimento destas atividades, também dá destaque a não linearidade das ações dos modeladores. Ou seja, os ciclos pretendem incluir o aspecto de que idas e vindas entre as diferentes etapas são recorrentes e relevantes para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Para sinalizar essa característica do desenvolvimento da atividade de modelagem, muitos professores/pesquisadores têm inserido as setas de duplo sentido nos esquemas

representativos do ciclo de modelagem que constroem (DOERR; ÄRLEBÄCK; MISFELDT, 2016; SHAHBARI; TABACH, 2017; GALBRAITH, 2012, entre outros). No presente artigo vamos considerar o ciclo apresentado em Galbraith (2012) (Figura 1).

Figura 1: Ciclo de modelagem matemática apresentado em Galbraith (2012)³



Fonte: Adaptado de Galbraith (2012)

Na apresentação desse ciclo o autor, ao iniciar com uma situação da realidade, pondera que pensar a modelagem para aulas de matemática requer a consideração de um ciclo que, ao mesmo tempo em que expressa orientações do que os alunos farão para resolver um problema, deve servir como guia para o diagnóstico e a intervenção do professor. Assim, as seis etapas (de A até G na Figura 1) são ligadas por setas sobre as quais estão números que identificam as ações dos modeladores (neste caso alunos ou professores).

Entretanto, as setas indicam que o movimento neste caso se dá nos dois sentidos. Ou seja, se considerarmos, por exemplo, as etapas C e D, a ação (3) de trabalhar com a matemática, caracterizada entre o modelo matemático e a solução matemática, pode se dirigir tanto do modelo para a solução quanto no sentido inverso.

O que se pode conjecturar a partir das indicações do ciclo é que a modelagem matemática requer disposição para explorar a situação e recomeçar sempre que necessário, para incrementar o que já se sabe sobre a situação investigada bem como para refletir sobre o que ainda não se é capaz de dizer sobre ela. Desta atividade cíclica segue-

³ Traduzido para o português pelas autoras.

se, conforme ponderam Schukajlow *et al.* (2015), a possibilidade de diferentes soluções para um problema definido em uma situação da realidade, considerando especificidades do contexto e interesses dos modeladores. Conforme sugerem Achmetli, Schukajlow e Rakoczy (2018) e Almeida (2014; 2018), essas diferentes soluções se vinculam, muitas vezes, às diferentes hipóteses e às diferentes possibilidades para a matematização da situação, podendo-se considerar então a plausibilidade de setas de duplo sentido entre as diferentes etapas do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

No presente artigo nosso interesse está em investigar se os duplos sentidos das setas inseridas nos ciclos podem ser associados às estratégias heurísticas dos alunos quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática.

Sobre estratégias heurísticas

O termo *heurística* tem origem na palavra grega *heurisko* que é associada a significados como o das expressões *Eu encontrei*, *Eu descobri* e inclusive à palavra *Eureka* apresentada por Arquimedes, sinalizando sempre uma descoberta de alguém em relação a algo (ROTT, 2015). No âmbito da Educação Matemática muito do que se entende por *heurística* tem sua origem nas ideias de George Pólya, reconhecido como o precursor da resolução de problemas. Pólya (1945), embora não apresente expressamente uma definição de heurística, considera que a “a finalidade principal da heurística é indicar os métodos e as regras relativas à descoberta e à invenção” (PÓLYA, 1945, p. 112).

As discussões a respeito de heurísticas no ensino de matemática, entretanto, têm tido repercussões em diferentes campos da área de Educação Matemática, conforme sugere Rott (2015). Neste contexto, Kilpatrick (1967) define uma heurística como um dispositivo, uma técnica ou o uso consciente de uma regra que incrementa a resolução de um problema. Para o autor, uma heurística pode ser algo não necessariamente definitivo, mas sujeito a alterações ou complementações, e sem garantia de que produza um resultado efetivo na produção de uma resposta para o problema, mas reflete os propósitos daquele que busca a resposta ao traçar e percorrer um caminho de busca.

Esta caracterização sugerida por Kilpatrick tem recebido aprofundamentos, especialmente pelos que se direcionam por uma linha cognitivista para se referir às heurísticas dos alunos. Neste contexto emerge o uso do termo *estratégias heurísticas*.

Faz se necessário, portanto, deliberar sobre o que se entende por *estratégia*. Usamos aqui ideias de Hartman (2001) cuja caracterização de estratégia é de que se trata de uma operação consciente e planejada e que, embora possa ser aprendida e aplicada

conscientemente, no decorrer do tempo pode ter um uso inconsciente.

Constituímos, portanto, a caracterização de *estratégia heurística* com base em Kilpatrick (1967) e em Hartman (2001). Assim, entendemos estratégias heurísticas como dispositivos (em geral mentais) usados pelos alunos para definir encaminhamentos adequados na resolução de um problema. Estes dispositivos, entretanto, podem ser provisórios de modo que podem ser substituídos por outros sempre que sua eficiência para a obtenção de uma solução para o problema não seja confirmada no decorrer da resolução desse problema.

Esta perspectiva para as estratégias heurísticas encontra respaldo nas ideias de Schoenfeld (1985) que se refere a *estratégias heurísticas* como *regras de ouro* para a resolução bem sucedida de um problema e que proporcionam aos alunos entender um problema e obter progressos na busca da solução.

Vale refletir, entretanto, sobre o que é um *problema*. Embora essa reflexão possa se fomentar no campo da filosofia, no escopo do presente artigo nosso entendimento vem pautado nas argumentações de Dörner (1976). Esse autor afirma que para caracterizar um problema temos que considerar que: um indivíduo se confronta com um problema quando, por alguma razão, se depara com uma situação indesejada (problemática) e não tem meios, a priori definidos, para transformá-la numa situação desejada e confortável. Assim, Dörner (1976) defende que um problema é uma situação em que o sujeito identifica qual é seu objetivo, mas não identifica imediatamente meios para atingir esse objetivo.

Considerando que os meios para atingir o objetivo, ou seja, resolver o problema, são revestidos de estratégias heurísticas, Pólya (1945) se refere a estas estratégias como *ferramentas do pensamento* para orientar os alunos na busca de uma solução para um problema.

Hoon *et al.* (2013), apoiados nos argumentos de George Pólya, apresentam como exemplos de estratégias heurísticas: procedimentos de tentativa e erro, de busca por padrões e de definição de hipóteses; práticas que, para identificar como seguir em frente, voltam-se a olhar para trás, identificando o que já foi feito e como se pode seguir; práticas que para resolver um problema, consideram útil dividi-lo e resolver subproblemas separadamente.

Este delineamento para as estratégias heurísticas tem recebido complementações e interpretações nos últimos tempos (NOVOTOÁ *et al.*, 2015; YANEZ, 2018; STENDER, 2018, 2019; STENDER; STUHLMANN, 2018). Novotoá *et al.* (2015) interpretam as ideias de Pólya e identificam seis grupos de ações que configuram estratégias heurísticas

identificadas na resolução de um problema em matemática. A saber, as estratégias: (1) definidas a partir de analogias; (2) de simulação do tipo tentativa e erro; (3) de uso de experimentações; (4) de reformulação do problema, visando identificar partes do problema e, muitas vezes, fragmentações do problema; (5) de traçado de figuras ou representações gráficas; e (6) estratégias de uso de funções e seus gráficos para esboçar a resposta de um problema.

Segundo Rott (2015), as estratégias heurísticas ajudam o aluno: (a) a entender o problema por meio de uma análise adequada das informações e transformá-lo em algo acessível e compreensível; (b) a planejar o processo de resolução conscientemente, não para conduzir um procedimento de tentativa e erro sem um objetivo bem definido. Na perspectiva desse autor podemos dividir as estratégias heurísticas em dois grupos: aquelas que se relacionam ao processo de resolução do problema como um todo, por exemplo, planejamento geral da resolução de um problema (heurística global) e aquelas que são locais por natureza, referindo-se a procedimentos específicos importantes para a investigação da situação e resolução do problema (heurísticas locais).

No âmbito da área de Modelagem Matemática, particularmente, Stender (2018) e Stender (2019) têm caracterizado estratégias heurísticas dos alunos em atividades de modelagem. Stender (2018), a partir de pesquisas empíricas, sugere que estratégias heurísticas em atividades de modelagem matemática podem consistir em: organizar o material relativo ao problema; usar o que o autor chama de memória de trabalho, combinando representações, criando subproblemas; pensar grande, no sentido de não estabelecer limites rígidos para a abrangência dos procedimentos; buscar generalizações; usar o que já sabe de outros problemas ou de outras atividades, em consonância com a ideia de usar analogias; determinar o que o autor chama de aspectos funcionais e estão associados à definição de encaminhamentos específicos tais como incrementar os dados usados ou discretizar a situação; organizar o trabalho, indo e voltando, mantendo a abordagem ou mudando-a se considerar adequado.

No presente artigo valemo-nos de uma pesquisa empírica para tratar de estratégias heurísticas em atividades de modelagem matemática, buscando nestas estratégias elementos para justificar o uso de setas de duplo sentido no esquema que representa um ciclo de modelagem matemática.

A pesquisa desenvolvida

A pesquisa empírica que fomenta nossa problematização refere-se a um recorte de

uma pesquisa coordenada pelas autoras do presente artigo. Particularmente, consideramos o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática realizado por um grupo de cinco alunos de uma disciplina de Modelagem Matemática ministrada por uma das autoras deste artigo em um programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Participou da aula em que a atividade foi desenvolvida a outra autora do artigo e professora integrante da equipe de pesquisa, visando colaborar nas discussões com os alunos e na coleta de dados. Os dados que subsidiam nossas argumentações são falas e gestos coletados por meio de gravação em áudio e vídeo no decorrer do desenvolvimento da atividade, bem como o relatório entregue pelo grupo e uma apresentação dos resultados realizada durante aulas da disciplina. No texto usamos nomes fictícios para os alunos, que, todavia, estavam conscientes da pesquisa.

O lugar teórico – as estratégias heurísticas – de onde olhamos para as ações dos alunos na atividade de modelagem matemática apresentada fomenta nossa discussão relativa ao uso de setas de duplo sentido em ciclos de modelagem matemática. O caminho metodológico no artigo vem respaldado em uma descrição narrativa visando investigar se nesta experiência com modelagem as estratégias heurísticas podem indicar o uso destas setas no ciclo. Nosso processo analítico considera o ciclo de modelagem apresentado na Figura 1, de modo que nossa análise se dirige às ações dos alunos modeladores visando elucidar como o uso de setas pode ser caracterizado nesta experiência com modelagem matemática. Neste sentido, a análise qualitativa interpretativa conduz a ciclos de modelagem percorridos pelo grupo de alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

A atividade de modelagem matemática

A atividade de modelagem matemática a que nos referimos dirige-se a uma situação realística provavelmente conhecida por biólogos ou mesmo admiradores ou criadores de pássaros: a alimentação de pássaros. Para esta atividade a professora da disciplina levou aos alunos algumas informações relativas a esta situação, conforme indica o Quadro 1. Também foi sugerida uma pergunta inicial que poderia subsidiar os encaminhamentos dos alunos ou mesmo direcionar suas intenções nessa atividade.

Quadro 1: Comedouro de pássaro

<p style="text-align: center;">O PROBLEMA DA ALIMENTAÇÃO DE PÁSSAROS</p> <p>Segundo informações de ornitólogos, a alimentação de pássaros é uma atividade que requer alguns procedimentos relativamente regrados. Em geral são construídos comedouros para os pássaros, tanto para pássaros em cativeiro como para alimentar pássaros livres que se aproximam de determinado lugar a fim de buscar alimento. Estes comedouros costumam ter a forma mais ou menos como indica a figura. Veja</p>
--

que os pássaros se apoiam em pequenas hastes, chamadas poleiros, e então têm acesso ao alimento por meio de furos de alimentação.

O comedouro tem uma tampa superior em que o alimento é inserido. Ao fornecer alimento para os pássaros nestes comedouros é preciso se certificar de que os comedouros estejam com comida para que os pássaros tenham alimento a qualquer hora e continuem voltando no decorrer do dia para se alimentar. Dois aspectos são importantes: com o reabastecimento adequado, raramente as aves procurarão comida em outro lugar; reabastecer demais e tocar nos comedouros várias vezes ao dia pode afugentar os pássaros.



PERGUNTA PRINCIPAL

Como pode se organizar a reposição de alimento para que os pássaros continuem se alimentando nos comedouros?

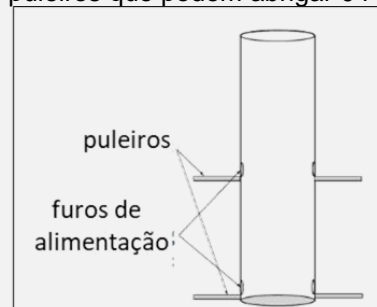
Fonte: Adaptado de Pollak (2012)

Nesta atividade os alunos são desafiados a estruturar configurações de como a alimentação dos pássaros pode ser realizada. Trata-se, portanto de uma modelagem matemática genuína, como sugerem Rellensmann, Schukajlow e Leopold, (2019) e Ferrando e Segura (2020), considerando que se trata de um problema da realidade para o qual não se tem esquemas a priori definidos para buscar a solução e podendo também apresentar diferentes soluções. De fato, o desenvolvimento dessa atividade foi realizado visando apresentar diferentes configurações que a reposição de alimento para os pássaros poderia assumir com base nos dois aspectos considerados importantes na situação: os comedouros não podem esvaziar; reabastecer demais e tocar nos comedouros várias vezes ao dia pode afugentar os pássaros.

As etapas iniciais da atividade foram discutidas de forma conjunta entre as professoras e os alunos. Com esta finalidade, após a leitura e discussão das informações do Quadro 1, foi definido que para resolver o problema os alunos poderiam considerar situações com diferentes quantidades de furos de alimentação e com algumas hipóteses para estas situações. Foram então apresentadas duas possibilidades para a estrutura dos comedouros que deveriam ser estudadas e, a partir delas, uma generalização poderia ser construída, conforme indica o Quadro 2.

Quadro 2. Possibilidades para a estrutura dos comedouros

1) A primeira situação é aquela em que há 04 furos de alimentação no comedouro (portanto há quatro poleiros que podem abrigar 04 pássaros conforme indica a imagem a seguir.

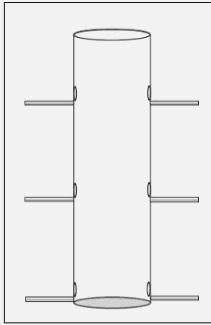


Para esta situação vamos considerar que:

- i) Quando você observa os comedouros pela primeira vez, no início da manhã, nos 04 furos de alimentação há indicativo de que o alimentador está cheio.
- ii) Você volta para os comedouros 45min depois e observa que está cheio até na metade.

Pergunta: Você espera que o comedouro esteja vazio depois de quanto tempo?

2) A segunda situação consiste em um comedouro com 06 furos de alimentação conforme indica a imagem a seguir.



Para esta situação, consideremos que:

A primeira vez que você se dirige aos alimentadores percebe que estão com cerca de $\frac{2}{3}$ da sua capacidade de alimento. Você aguarda e observa que 30min depois os alimentadores contém cerca de $\frac{1}{3}$ de sua capacidade de alimento.

Pergunta:

Depois de quando tempo o comedouro estará vazio?

3- Pode escrever uma generalização para o problema dos comedouros com um número qualquer de furos?

Fonte: Dados da Pesquisa

As estratégias heurísticas dos alunos na atividade e o ciclo de modelagem matemática

Levando em consideração as características definidas para os comedouros e de que a partir delas se poderia estruturar uma generalização, a atividade de modelagem matemática está alinhada com o que Rellensmann, Schukajlow e Leopold (2019) caracterizam como *multi-step problem*. Neste caso, particularmente, cada *step* pode ser associado a uma configuração particular da quantidade de furos do comedouro ou da quantidade de pássaros que nele se alimentam. Neste sentido, as estratégias heurísticas podem ser idênticas em diferentes *steps* ou podem ser rejeitadas de um *step* para outro.

Embora a questão proposta, “Como pode se organizar a reposição de alimento para que os pássaros continuem se alimentando nos comedouros?” fosse diretriz das ações dos alunos, ela era absolutamente aberta de modo que o grupo poderia considerar nuances e aspectos específicos não incluídos nas orientações fornecidas pela professora.

De fato, as discussões do grupo se direcionaram para aspectos não bem esclarecidos nas orientações apresentadas. O diálogo dos alunos transcrito a seguir dá indícios de como se daria o encaminhamento da atividade pelo grupo:

José: O que precisa? Altura, número de furos.

Maria: O que vai influenciar é o tempo de reposição também. Pensei da gente seguir essas orientações. A gente podia também pensar: se não fosse dessa forma, que outra poderia ser? Me incomoda o fato de não ter nada lá para regradar. Como desce o alimento? Uma coisa que a gente deve colocar é... vamos supor que não escape alimento pelo furo né? Porque é bem provável que escape né? Porque é um buraco [apontando para o desenho do comedouro].

Ana: Porque se ele está cheio né?

Pedro: Sim.

Maria: Isso é uma hipótese? Também poderia procurar a necessidade do pássaro com a comida.

Pedro: De quanto precisa comer. [procura no notebook]
Maria: Para definir uma taxa, uma taxa de variação talvez [procura no celular]
João: O que você está vendo Pedro?
Pedro: A gente está vendo se existe alguma medida-padrão.
João: Esse comedouro é carregado por cima?
Pedro: É.
Maria: Qual é a frequência Pedro? [apontando para a tela do notebook].
João: Porque se vai acabando o alimento aqui, aqui vai ficando sem comida [apontando para a parte superior do comedouro].
Maria explicando para João e José: Mas a ideia é como colocar de modo que os pássaros sempre tenham disponibilidade. A qualquer hora.
José: É.
Maria: Talvez para otimizar a posição, é pensar até quando chega aqui nesse primeiro furo né? Tipo, vamos estabelecer uma taxa de descida aqui, de vazão pode até ser. Aí tem de reabastecer. A gente poderia pensar em abastecer... isso simplifica né?
João: Sim.
Maria: Sempre que chega nesse nível. Aí vai garantir que sempre vai ter alimento aí para baixo. Aí a rapidez vai ser diferente se for quatro furos, seis furos, generalizar por aí. A ideia é que vai ter de estabelecer uma hipótese que todos os furos vão ter a mesma vazão, ou seja, os pássaros vão se alimentar igualmente.
(Diálogo entre alunos, 2019).

O diálogo sinaliza a intenção dos alunos em estruturar/regular um encaminhamento para a situação, em que, para além de uma interpretação das informações disponíveis, houvesse uma busca por informações adicionais. Este encaminhamento ao mesmo tempo em que reúne aspectos genuínos de uma atividade de modelagem matemática, tais como a simplificação e a definição de hipóteses, vem cercado de estratégias de pensamento – estratégias heurísticas – que se alinham com o que Rott (2015) no contexto da resolução de um problema caracteriza como uma aproximação do fenômeno em estudo de algo acessível e compreensível para os alunos.

A simplificação da situação pelos alunos que, embora implícita e talvez até usada de forma inconsciente, revela que a estratégia heurística se alinha com o que Stender (2018), no contexto de atividades de modelagem matemática, caracteriza como memória de trabalho. De fato, os aqui denominados alunos são professores que já tiveram experiências anteriores com modelagem matemática de modo que a situação não lhes era absolutamente nova. Entretanto, havia sim um problema! Não havia, de fato, um esquema a priori definido de como deveriam proceder.

O que se pode caracterizar inicialmente a partir do diálogo dos alunos é um planejamento geral, sinalizando heurísticas globais visando estruturar e organizar encaminhamentos pormenorizados para a atividade. Diferentes etapas do desenvolvimento da atividade já estão neste planejamento dos alunos, sobretudo referindo-se a uma terminologia própria do contexto de atividades de modelagem matemática como hipóteses,

simplificações e nuances de matematização.

Uma das integrantes do grupo tomou a iniciativa de propor uma possibilidade para iniciar o trabalho matemático, conforme sugere a transcrição de diálogo entre os alunos do grupo.

Maria: A gente poderia pensar em começar a resolver a partir das dicas. Essa nossa ideia aí inicial de vazão e tal, não está levando em conta isso [apontando para a folha e as dicas] inicialmente. Porque aqui já é o caminho para generalizar né? Quatro furos a velocidade vai ser trinta. Se a gente conseguir descobrir qual é a necessidade diária deles.

Pedro: Sim, vai dar para fazer assim!

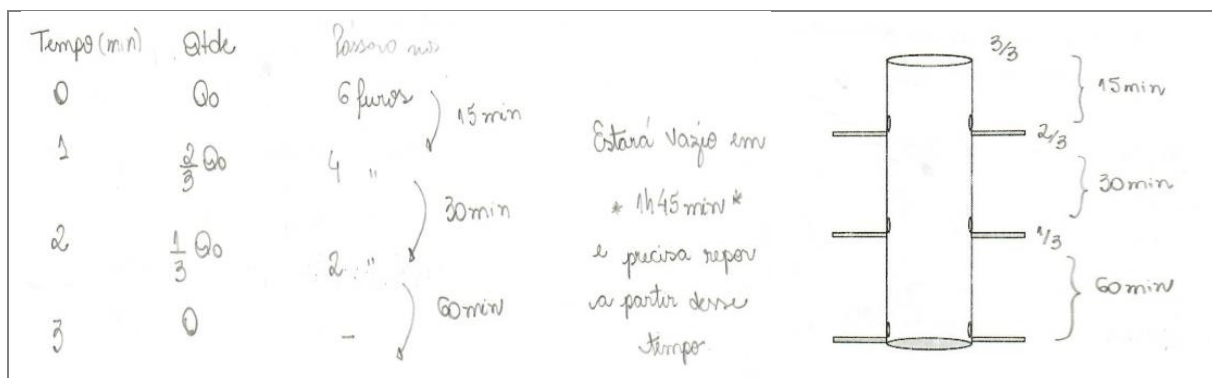
[...]

Maria: A gente assume que a taxa de variação da quantidade em relação ao tempo é proporcional à quantidade em cada tempo. Ou seja, a gente considera que depois que passou da metade só terão dois furos para eles se alimentarem, né?... Não consideramos aqui quantidade de pássaros.

As ponderações da aluna são indícios de como a situação da realidade estava se transformando em uma situação passível de matematização, mas sem deixar de ser vinculada à realidade da alimentação de pássaros. Ou seja, os alunos estavam empenhados em estruturar a situação, simplificar, interpretar o contexto. Nesse caso, a estratégia heurística era de organizar o material, visando entender a situação e transformá-la em algo compreensível e assim, em alguma medida, regular o que deviam fazer na atividade.

Então um primeiro esboço de resolução dos alunos se deu justamente usando o que um dos alunos (Maria) sugeriu: começar usando as dicas, referindo-se às orientações apresentadas no material entregue pela professora. Parece que se caracteriza aí a estratégia heurística de experimentar, visando obter progressos na busca da solução. Entretanto, com esta estratégia, o grupo formalizou uma resolução no papel apenas para o caso do comedouro de 06 furos, conforme sugere a Figura 2.

Figura 2: Matematização dos alunos para o caso do comedouro de 06 furos

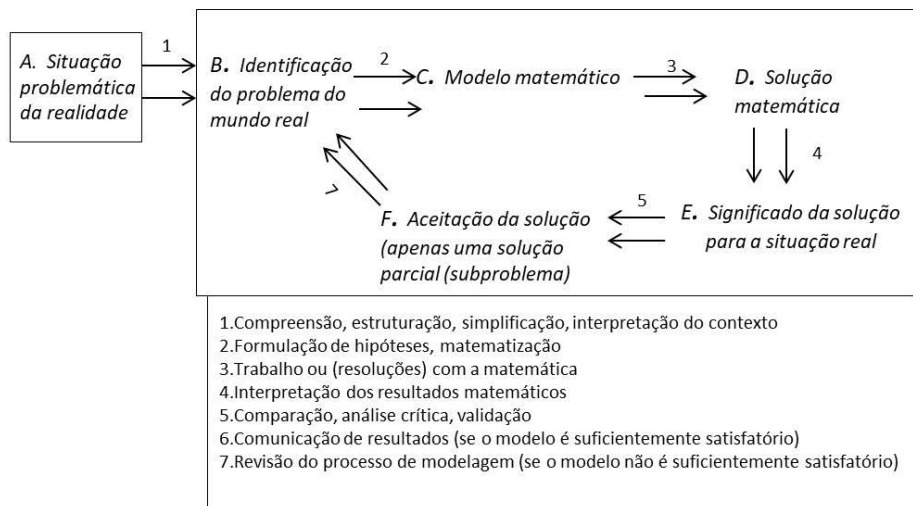


Fonte: Acervo da Pesquisa

Nesta formalização, estratégias heurísticas locais como definir hipóteses, resolver subproblema, traçar figuras ajudariam os alunos a entender o problema e organizar o pensamento para uma possibilidade de generalização.

Pode-se caracterizar até este momento do trabalho dos alunos um ciclo de modelagem matemática que, para um subproblema particular da situação em estudo na atividade (comedouros até 06 furos), apresenta uma solução. Não havia, entretanto, até este momento uma revisão do modelo e uma comunicação de resultados. Todavia, uma inquietude dos alunos já se assinala de modo que a ação 7 (revisando o processo de modelagem) pode ser identificada. Assim, considerando o ciclo de modelagem matemática da Figura 1, podemos identificar quais etapas foram percorridas, conforme sugere a Figura 3.

Figura 3: Ciclo 1 da primeira abordagem



Fonte: Acervo da Pesquisa

Neste primeiro ciclo (ainda parcial) que construímos para a ação dos alunos nesta atividade, não caracterizamos setas de duplo sentido. Ou seja, embora o grupo já houvesse apresentado uma solução para o problema em estudo, tratava-se ainda de um subproblema do que pretendiam fazer na atividade, conforme eles próprios reconhecem no diálogo ilustrado a seguir.

Maria: Deve ter uma indicação de quantos têm de dar né?

José: Tem, né?

Maria: A gente não precisa considerar em quantidade de pássaros, a gente pode considerar que, independente do número de pássaros, a gente poderia considerar que, cada furo a vazão vai ser igual, porque senão o problema fica complexo.

João: É, exatamente.

(Diálogo entre alunos, 2019).

Assim, diante do que o grupo deveria fazer nesta atividade, esta primeira ideia era

apenas parcial e os alunos estavam certos de que era apenas uma *ideia no papel*. Outros encaminhamentos deveriam surgir.

Os diálogos dos alunos, agora mais intensamente interagindo com as professoras, visavam determinar uma abordagem matemática que, segundo os próprios alunos, seria mais adequada para a situação, considerando especificidades do comedouro e do processo de alimentação dos pássaros que foi relatado por um dos integrantes do grupo que tem aves em casa. Outra matematização alinha-se com uma ferramenta de pensamento que ao mesmo tempo em que avalia a resposta anterior, também indica uma possibilidade de prosseguir no desenvolvimento da atividade.

Maria: Independente da quantidade de pássaros que tiver ali, a gente vai estabelecer o fluxo do consumo da ração.

José: Estipular quanto que o pássaro come.

João: A gente tem doze periquitos. A gente troca por dia aquilo. Por dia. A cada dia a gente troca.

Maria: Mas é quanto o volume mais ou menos? Vocês põem uma vez por dia?

João: A gente troca uma vez por dia e eles comem. Eles não se movimentam muito ali.

[...]

Maria: Isso cheio, e o que acontece? O que a gente tem de ver? Qual é a taxa de descida aqui. Para saber de quanto em quanto tempo tem de voltar a completar.

Maria: Represente segundo taxas que o comedouro esvazia. Como assim? Poderíamos pensar em termos de taxa? Sim. [...] Pedro, essa continha aqui, foi o raciocínio inicial que representa como que decai em termos da quantidade inicial, só que aqui já em termos da razão. Aqui [escrevendo] em termos da quantidade inicial, [...] das taxas.

(Diálogo entre alunos, 2019).

Neste caso, a aluna usava as imagens da folha entregue pela professora e fazia traçados e anotações (Figura 4) que na perspectiva de Novotoá et al. (2015) constituem estratégia heurística e, no entendimento de Stender (2018), é a estratégia heurística reconhecida como seguindo *aspectos funcionais*, em que o grupo de alunos estava em busca de definir encaminhamentos específicos para incrementar aos dados usados. Estas estratégias possibilitaram aos alunos prosseguir no desenvolvimento da atividade de modelagem.

Figura 4: Aluna realizando traçados e anotações



Fonte: Acervo da Pesquisa

Estes diálogos dos alunos revelam como as estratégias heurísticas enquanto ferramentas de pensamento de procurar regularidades, definir hipóteses, usar o que já sabem, foram criando esquemas mentais que resultaram na matematização e resolução do problema conforme sugere a Figura 5.

Figura 5: Matematização e resolução dos alunos

Para 4 furos:

H₁ = os primeiros furos estão na metade do corredor.

H₂ = não há perda de raças pelos furos além do que é consumido pelos pássaros.

H₃ = os pássaros se alimentam mais logo pela manhã

H₄ = o corredor é considerado vazio quando contém 5% de sua capacidade.

Resolução 1

H₅ = a taxa de variação da quantidade é proporcional à quantidade em cada tempo $\left[\frac{dQ(t)}{dt} = k \cdot Q \right]$

Tempo	Quantidade
0	Q ₀
1	$\frac{1}{2} Q_0$

* $Q(t) = Q_0 e^{-0,69t}$

$t \cong 6,7$ (1u = 45 min) ∴ 5h 1m 30seg depois é considerado vazio.

$$\frac{dQ(t)}{dt} = k \cdot Q$$

$$\int \frac{1}{Q} dQ = \int k dt$$

$$\ln(Q) = k \cdot t + C$$

$$Q = e^{kt+C}$$

$$Q(t) = C_1 e^{kt}$$

$$Q(0) = Q_0$$

$$Q(0) = C_1 e^0$$

$$C_1 = Q_0$$

$$t_1 \Rightarrow Q(t_1) = \frac{1}{2} Q_0$$

$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{kt}$$

$$e^{kt} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = k \Rightarrow k = -0,69$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-0,69t}$$

$$\frac{1}{100} Q_0 = Q_0 e^{-0,69t}$$

$$\frac{1}{100} = e^{-0,69t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{100}\right) = -0,69t$$

$$t \cong 6,7$$

Depois de 30 min:

$$t = \frac{30}{60} \rightarrow Q\left(\frac{30}{60}\right) = Q_0 e^{-0,69 \cdot \frac{30}{60}}$$

$$Q\left(\frac{30}{60}\right) = Q_0 e^{-0,46}$$

$$Q\left(\frac{30}{60}\right) = Q_0 \cdot \frac{1}{e^{0,46}}$$

$$Q\left(\frac{30}{60}\right) = 0,63 Q_0$$

Depois de 2h:

$$t = \frac{2}{3} \rightarrow Q\left(\frac{2}{3}\right) = Q_0 e^{-0,69 \cdot \frac{2}{3}}$$

$$Q\left(\frac{2}{3}\right) = Q_0 e^{-1,38}$$

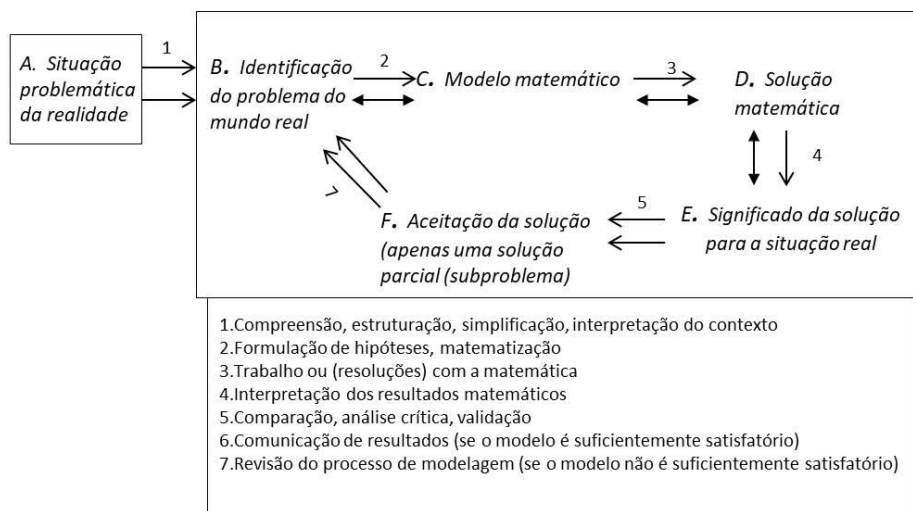
$$Q\left(\frac{2}{3}\right) = Q_0 \cdot \frac{1}{e^{1,38}}$$

$$Q\left(\frac{2}{3}\right) = 0,16 Q_0$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

O que se pode observar nesta resolução da Figura 5 é que o grupo formulou hipóteses e, transformando as orientações da professora em dados do problema, a matematização (usando uma equação diferencial) produziu um modelo matemático que foi capaz de responder as perguntas enunciadas no Quadro 1. Assim até este momento, a resolução dos alunos referida como primeira abordagem, pode ser associada com o que já haviam realizado anteriormente de modo que podemos considerar uma configuração de ciclo nesta abordagem atual conforme indica a Figura 6.

Figura 6: Ciclo 2 da primeira abordagem



Fonte: Acervo da Pesquisa

Neste caso, a partir das informações da Figura 5 e dos diálogos dos alunos, podemos inferir que heurísticas de organizar o material, definir hipóteses, fazer experimentações são indícios da ocorrência do duplo sentido entre as etapas B e C. Já o uso de analogias, usar o que já sabe de outras atividades, combinar representações, são indicativos que justificam o duplo sentido das setas entre C e D e entre D e E.

Entretanto, o grupo continuou percebendo limitações nesta *primeira abordagem* para a situação. Nas discussões, os integrantes do grupo fizeram uma análise do que haviam feito e o que conseguiriam deliberar com relação às possíveis configurações da alimentação de pássaros usando esse tipo de comedouros. Esta análise certamente pode ser vista como o que Schoenfeld (1985) denomina de *regra de ouro* para o desenvolvimento da atividade de modelagem, uma vez que desta análise se encaminharia uma estruturação ainda mais completa em relação às deliberações anteriores em relação às possibilidades para a alimentação dos pássaros. Além disso, consideraram relações matemáticas já estudadas em outras situações – taxa de variação – em consonância à estratégia heurística do uso de memória de trabalho de forma eficaz. As transcrições do diálogo a seguir esclarecem partes

das discussões dos alunos.

Maria: A gente levou em consideração a taxa de decaimento que está indicada e a hipótese de que a variação é proporcional à quantidade.

Professora: Sim e daí usaram a ideia de taxa de variação.

Maria: Tá, e nós levamos em consideração a quantidade de alimento e não em relação à quantidade de furos. A nossa primeira abordagem não levou em conta a quantidade de furos. Levou em conta que essa taxa depende da quantidade de alimento em função do tempo.

Maria: Mas o que a gente precisa considerar como hipótese se levar em conta que o número de furos influencia, vamos deixar como hipótese que eles procuram o alimento mais pela manhã, que é o que parece que acontece na prática né? E levar em conta que a todo momento vai ter pássaro com a mesma voracidade, vamos dizer assim né, por comida...

Pedro: No mesmo furo eles vão estar sempre comendo com a mesma razão, certo?

Ana: Vamos considerar os furos.

Maria: E outras hipóteses.

João: Ah sim, vamos generalizar para mais furos, aqui são seis.

(Diálogo entre professora e alunos, 2019).

Na apresentação da atividade para a turma um dos alunos justifica a necessidade de buscar outra maneira de enfrentar o problema da alimentação dos pássaros:

Pedro: E daí a gente respondeu aquelas questões de quantidade de ração em trinta minutos e em duas horas, [explica a resolução matemática]. Com essa abordagem nós procuramos responder aquelas primeiras questões. Mas, como eu disse, o grupo não ficou satisfeito com essa abordagem e nós consideramos uma segunda tentativa para os dados.

Assim, os alunos partiram para o que denominaram de uma *segunda abordagem*. Para isso realizaram uma nova estruturação para o que estavam estudando, estabelecendo hipóteses com relação a especificidades do comedouro que escolheram para investigar. Para prosseguir nesse encaminhamento, o grupo de alunos fez algumas especificações quanto ao tamanho do comedouro, distância entre os puleiros – considerando o tamanho dos pássaros – em busca de uma generalização, além de organizar o material com o intuito de resolver o problema. Nos diálogos a seguir é possível evidenciar essa ação:

Maria: A ideia é, dependendo do número de furos, então a gente tem que dividir o espaçamento.

João: A gente mantém o tamanho do negócio [referindo-se ao comedouro].

Maria: Mantém o tamanho do negócio e diminuiu a distância entre eles.

João: Exatamente.

[...]

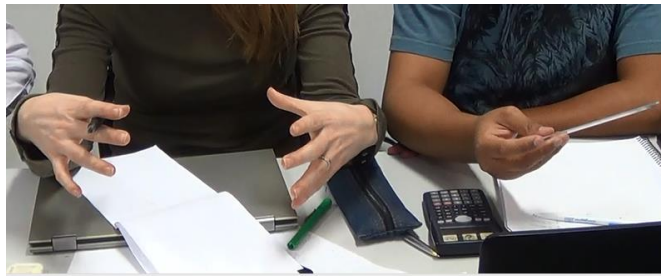
Maria: Tem que pensar numa altura ou o pássaro fica encolhidinho!

João: Ter uma altura ideal?

Maria: Uma altura mínima, pelo que a gente viu aqui o pássaro pode ter até 15 cm. E o comedouro? Quanto tem aqui Pedro, 20 cm de diâmetro? [gesticulando com as mãos – Figura 7].

(Diálogo entre alunos, 2019).

Figura 7: Estimando o tamanho do comedouro



Fonte: Acervo da Pesquisa

As discussões do grupo foram então interrompidas e houve intervalo para almoço na aula. Neste espaço de tempo, dois integrantes do grupo dirigiram-se a um *pet shop* para coletar algumas informações que lhes pareciam necessárias para fazer uma abordagem que pudesse lhes parecer mais realista. Incrementar os dados com mais informações, e até mesmo considerar o problema em partes (com o número de pássaros e sem essa informação) é uma estratégia recorrente e de grande valia no enfrentamento da resolução de um problema. O diálogo a seguir indica como os alunos definiram encaminhamentos específicos a partir de informações obtidas no *pet shop*, planejando uma nova forma de enfrentar o problema. Este planejamento caracteriza-se como heurística global, visando regular de que forma procedimentos específicos poderiam contribuir e proporcionar a solução que buscavam construir.

Maria: Eu fui num pet ali, aí ele me falou assim que um quilo, e apontou uma ração lá, dá para 15 dias para o periquito.

João: Para um só?

Maria: Para um periquito.

João: Um quilo?

Maria: Daí eu fiz as contas, 66 gramas por dia. [...]

Maria: Vamos considerar esses 66 g, eu achei bastante também, mas vamos considerar que come isso por dia. Quantos em gramas a gente considera que ele vai comer cada vez que vai? Daí a gente considera que sempre vai ter pássaros. Quanto tempo o pássaro fica comendo?

José: Uns 20 segundos né João?

João: Vou telefonar lá em casa para saber.

[aluno se levanta e faz o telefonema]

João: Eles falaram lá que depende. De manhã ficam um minuto mais ou menos, mas ao longo do dia diminuem, ficam uns 20 segundos.

Maria: Então vamos colocar 30 segundos por vez que ele vai e pensa que isso seja regular durante o dia.

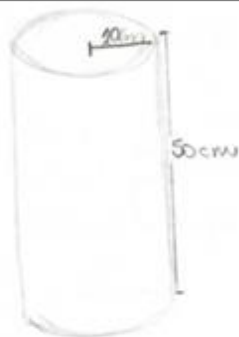
Pedro: Se a gente considerar quanto um passarinho come a cada vez e considerando que sempre tem um passarinho em um buraco, então se ficar 30 segundos lá comendo em média, cada vez que vai [discutem para determinar o valor 2,2g]. De cada buraco sempre vai sair 2,2 g. [foi falando e fazendo as anotações na folha].

(Diálogo entre alunos, 2019).

Desse diálogo passa a se configurar a segunda abordagem dos alunos para resolver

o problema dos comedouros, em que eles incluem na modelagem da situação a quantidade de pássaros que se alimentam e o tempo que o comedouro permanece com ração, conforme apresentado na Figura 8.

Figura 8: Resolução dos alunos para a segunda abordagem



I₁: A altura mínima do comedouro é de 50 cm.

I₂: 1kg de ração ocupa um volume de 1,5 L, logo o recipiente adotado permite armazenar 5000 ml \approx 10500 gr.

I₃: Um pássaro (periquito) come 1kg de ração em 15 dias, então come 66 gr por dia.

H₁: Os pássaros se alimentam no período diurno das 7h às 19h.

H₂: Cada pássaro permanece 30 seg se alimentando e, em 2,2 gr por vez (30 vezes);

H₃: Cada furo tem uma vazão de 264 gr por hora.

H₄: O espaçamento entre os buracos é sempre o mesmo.

7/4 furos:

Tempo (h)	Qtde (gr)	Número de Pássaros
0	10500	1ª camada de furos: 88 pássaros
5	5250	2ª " " " : 40 "
15	0	TOTAL : 128 pássaros

* Suficiente pl or 14h *

7/6 furos

Tempo (h)	Qtde (gr)	Número de Pássaros
0	10500	1ª camada: 88 pássaros
2,2	7000	2ª " : 44 "
5,5	3500	3ª " : 16 "
12,12	0	TOTAL : 148 pássaros

* Suficiente pl or 14h *

Síntese:

Furos	Tempo
4	15
6	12,12
8	10,34
10	9,05

Pássaros em busca uma generalização relacionando o número de furos e o tempo para esvaziar os comedouros.

A princípio, analisamos a variação no tempo para 4, 6, 8 e 10 furos e observamos que não é linear mas ainda não chegamos a um modelo.

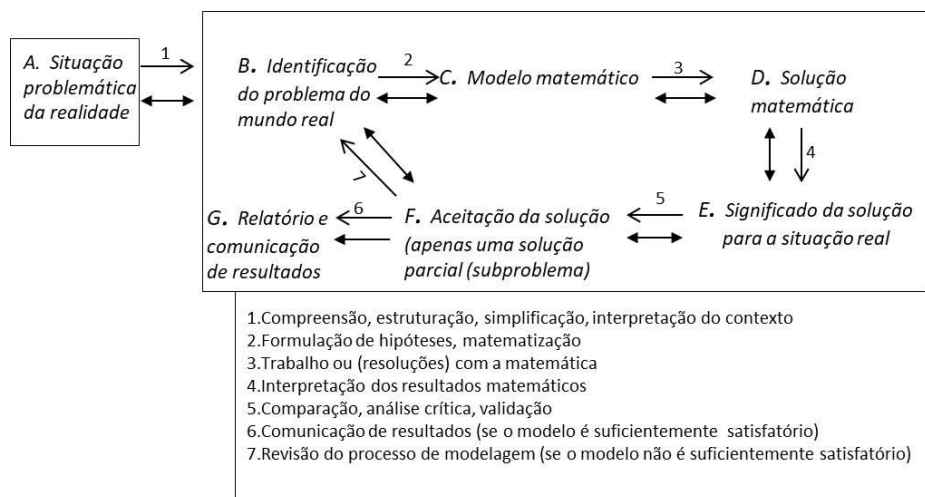
Fonte: Acervo da Pesquisa

Nesse caso a estratégia de definir novas hipóteses tem a intenção de proporcionar um prosseguimento na atividade, sendo estas hipóteses a base para uma matematização em que o tempo entre uma reposição e outra de alimentos no comedouro é determinada.

Nesta abordagem os alunos passaram a definir novas hipóteses a partir de outras informações de modo que é possível inferir um duplo sentido na seta entre as etapas A e B associada a uma heurística de pensar grande, visando complementar a abordagem da situação anterior e prosseguir no desenvolvimento da atividade. A matematização seguiu outro percurso em sintonia com a heurística de simular situações com diferentes números de pássaros e de quantidades de alimento nos comedouros. A construção de uma síntese para apresentar os resultados com comedouros até 10 furos, neste caso, vem alinhada com a estratégia heurística visando à busca de generalizações de modo que o duplo sentido entre as etapas E e F também pode ser considerado nesta última resolução proposta pelo grupo. A estratégia nesse caso se vincula a um interesse em regular a situação e avaliar a resposta obtida.

Assim, um ciclo que representa as ações dos alunos nesta atividade considerando esta segunda abordagem é conforme indica a Figura 9.

Figura 9: Ciclo da segunda abordagem



Fonte: Acervo da Pesquisa

Considerações finais

Nossas deliberações relativas à problematização do uso de setas de duplo sentido nos chamados ciclos de modelagem matemática a partir de uma lente teórica, as estratégias heurísticas, possibilitam trazer para as discussões no âmbito da área de Modelagem Matemática o uso de ciclos de modelagem e a relevância de considerar os sentidos das setas que ligam as diferentes etapas incluídas nos esquemas que

representam este ciclo.

Reconhecendo que também no âmbito da presente pesquisa a ação humana é situada, nossa problematização da experiência de um grupo de alunos com uma atividade de modelagem matemática nos permite oferecer algumas contribuições para pensar na característica cíclica atribuída ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Por um lado, identificamos nos procedimentos dos alunos o que Rott (2015) caracteriza como estratégias globais e estratégias locais. De fato, o que se pode inferir das ações, diálogos e registros dos alunos é a ideia de planejar a resolução do problema de forma estruturada e consciente, sem se valer de um conjunto de procedimentos de tentativa e erro. Além disso, estratégias locais como definição de hipóteses e o uso de ferramentas específicas (como equações diferenciais, por exemplo) viabilizaram aos alunos construir diferentes soluções para o problema. Pensar grande sem se limitar aos dados do problema oferecidos pela professora foi também uma estratégia heurística que orientou as diferentes abordagens para a situação proposta pelos alunos.

Além disso, consideramos que as estratégias heurísticas dos alunos constituíram ferramentas do pensamento para atuar como guia e ser na atividade o que Schoenfeld (1985), define como regras de ouro. Neste sentido, estas estratégias também proporcionaram aos alunos *voltar para trás*, pensar de outro jeito e avaliar resultados e definir novos encaminhamentos. Podemos considerar que as estratégias heurísticas em atividades de modelagem matemática podem se caracterizar como: estratégias para prosseguir, estratégias para regular e estratégias para avaliar. É justamente nestes diferentes papéis das estratégias heurísticas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática que se pode explicar ou confirmar que setas de duplo sentido no ciclo de modelagem matemática correspondem à identificação de um *fazer* ou a *percorrer um caminho* associado ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem caracterizado neste ciclo.

Neste sentido, se as pesquisas de Stender (2018) e Stender (2019) já identificaram estratégias heurísticas, na presente pesquisa podemos avançar e considerar que elas podem ser associadas e podem até mesmo justificar o uso de setas de duplo sentido nos esquemas relativos aos ciclos de modelagem matemática.

Por outro lado, entretanto, na pesquisa empírica que fomenta nosso esforço analítico, o grupo de alunos percorreu um caminho peculiar no desenvolvimento da atividade de modelagem. Mediados pelas discussões profícuas entre alunos do grupo e

entre alunos e professoras, os alunos foram buscando novos elementos para incorporar às suas ações de modo que novas configurações para a alimentação dos pássaros foram sendo caracterizadas. Desenvolver a atividade propondo três encaminhamentos, que embora complementares fossem autossuficientes porque cada um produziu um resultado para o problema em estudo, é o que fez emergir a ocorrência de idas e voltas pelas diferentes etapas identificadas no ciclo de modelagem caracterizado por Galbraith (2012).

A busca por informações complementares sobre a situação da realidade bem como a análise das distintas soluções visando torná-las mais robustas, podem não ser práticas recorrentes na sala de aula com modelagem matemática. Todavia, a orientação e intervenção do professor podem promover movimentos dos alunos nestas etapas do desenvolvimento da atividade. Estes movimentos podem ser mediados por estratégias heurísticas dos alunos.

De fato, conforme sugerem Blum e Leiss (2007) e Ferrando e Segura (2020), por exemplo, é recorrente em atividades de modelagem matemática os problemas admitirem mais de uma solução. Entretanto, os autores identificam estas diferentes soluções em grupos diferentes de modeladores. No caso da atividade a que nos referimos, o mesmo grupo de alunos foi estruturando os *multi-steps* a que se referem Rellensmann, Schukajlow e Leopold, (2019), buscando soluções que lhes parecessem mais eficientes para sugerir intervalos de tempo para a reposição de alimentos nos comedouros. Neste sentido, no ciclo de modelagem percorrido pelos alunos foram se apresentando as setas de ida e volta na medida em que também a intervenção das professoras foi diagnosticando o que os alunos ainda poderiam aperfeiçoar. Todavia, as ações para esse aperfeiçoamento foram mediadas pelas estratégias heurísticas dos alunos de pensar grande, de buscar analogias, de generalizar.

Assim, ainda que ciclos de modelagem matemática possam indicar um *modelo* do que se deve fazer em atividades desse tipo, conforme menciona Borromeo Ferri (2018), especificidades da situação, do contexto e dos alunos modeladores podem confirmar a natureza dinâmica da atividade de modelagem vislumbrada pelos autores de ciclos de modelagem com o uso de setas de duplo sentido. Além disso, em sintonia com o que apontam Stender e Stuhlmann (2018), os professores também precisam se engajar na promoção dessa dinamicidade das atividades de modelagem matemática. Entretanto, quando esse caráter dinâmico se evidencia na atividade, pode vir ancorado em estratégias heurísticas dos alunos modeladores.

Referências

- ACHMETLI, K.; SCHUKAJLOW, S.; RAKOCZY, K. Multiple solutions for real-world problems, experience of competence and students' procedural and conceptual knowledge. **International Journal of Science and Mathematics Education**, v. 17, p. 1605–1625, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, v. 18, número temático, p. 387-414, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W.; Jogos de Linguagem em Atividades de Modelagem Matemática. **VIDYA: Revista Eletrônica**, v. 34, n. 1, p. 241-256, 2014.
- ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 19-30, 2018.
- ALMEIDA, L. M. W. Estratégias heurísticas como meios de ação em atividades de Modelagem Matemática. **Com a Palavra o Professor**, v. 5, n.11, p. 220-236, 2020.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A matematização em atividades de modelagem matemática. **Alexandria**, v. 8, n. 3, p. 207-227, 2015.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- BASSANEZZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes**. New York: Springer, 2015, p. 73-96.
- BLUM, W.; LEISS, D. How do teachers deal with modelling problems? In: HAINES, C; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (Eds.). **Mathematical modelling. Education, engineering and economics**. Chichester, England: Horwood, 2007, p. 222-231.
- BORROMEO FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.
- BORROMEO FERRI, R. B. **Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education**. Picassoplatz, Switzerland: Springer, p. 13-39, 2018.
- ÇETINKAYA, B.; KERTIL, M.; ERBA, S. A. K.; KORKMAZ, H.; ALACACI, C.; ÇAKIRO GLU, E. Preservice teachers' developing conceptions about the nature and pedagogy of mathematical modeling in the context of a mathematical modeling course. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 18, n. 4, p. 287-314, 2016.
- DOERR, H. M.; ÄRLEBÄCK, J. B.; MISFELDT, M. Representations of Modelling in Mathematics Education. In: STILLMAN, G. A.; et al. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications, International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Springer International Publishing: AG 2017, 2016.

- DÖRNER, D. **Problemlösen als Informationsverarbeitung**. Kohlhammer: Stuttgart, 1976.
- FERRANDO, I.; SEGURA, C. Fomento de la flexibilidad matemática a través de una secuencia de tareas de modelización. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, p. 84-97, 2020.
- GALBRAITH, P. Models of Modelling: Genres, Purposes or Perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and application**, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.
- GALBRAITH, P.; STILLMAN, G. A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 143–162, 2006.
- GREEFRATH, G. Mathematical modelling competence. Selected current research developments. **AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática**, v. 17, p. 38–51, 2020.
- GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H-S. Mathematical modelling with digital tools – a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, v. 50, n. 1, p. 1-12, 2018.
- HARTMAN, H. J. Developing students’ metacognitive knowledge and skills. In: HARTMAN H. J. (Ed.). **Metacognition in learning and instruction**. Dordrecht: Springer Neuropsychology and Cognition, 2001, p. 33-68.
- HOON, T. S.; KEE, K. L.; SINGH, P. Learning Mathematics using heuristic approach. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 90, p. 862-869, 2013.
- KILPATRICK, J. **Analyzing the solution of word problems in mathematics: An exploratory study**. 1967. Doctoral dissertation.
- LESH, R.; HAREL, G.. Problem solving, modeling, and local conceptual development. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 5, n. 2, p. 157–189, 2003.
- MEYER, J. F. C. A. Modelagem Matemática: O desafio de se ‘fazer’ a Matemática da necessidade. **Com a Palavra o Professor**, v. 5, n.11, p. 140-149, 2020.
- NOVOTOÁ, J.; EISENMANN, P.; PRIBYL, J.; ONDRUSOVÁ, J.; BREHOVSKY, J. Problem solving in school mathematics based on Heuristic strategies. **ERIES Journal**, v. 7 n. 1, p. 1-6, 2015.
- PERRENET, J.; ZWANEVEL, D. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v.1, n.1, p. 3-21, 2012.
- POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects, **New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESCO, 1979.
- POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN; G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Cham, Switzerland: Springer, 2015, p. 265-276.
- POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics

Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

POLLAK, H. O. What is mathematical modeling? In: **Mathematical Modelin Handbook**. Bedford: COMAP, 2012. Disponível em www.comap.com. Acesso em: 20 ago. 2020.

PÓLYA, G. **How to Solve It**. Princeton: University Press, 1945.

RELLENSMANN, J.; SCHUKAJLOW, S.; LEOPOLD, C. Measuring and investigating strategic knowledge about drawing to solve geometry modelling problems. **ZDM Mathematics Education**, v. 52, p. 97–110, 2019.

ROBIM, B. N. P. A. S.; TORTOLA E.; ALMEIDA, L. M. W. A linguagem em atividades de modelagem matemática: caracterizações nos “três mundos da matemática”. **REnCiMa**, v. 5, n. 1, p. 1-20, 2014.

ROTT, B. Rethinking heuristics – characterizations and vignettes. **LUMAT**, v. 3, n. 1, p. 122-126, 2015.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Orlando: Academic Press, 1985.

SCHUKAJLOW, S.; KOLTER, J.; BLUM, W. Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. **ZDM Mathematics Education**, v. 47, n. 7, p. 1241–1254, 2015.

STENDER, P. **Heuristic Strategies as a Toolbox in Complex Modelling Problems**. ICME-13 Monographs. Germany: Universität Hamburg, Hamburg, 2019.

STENDER, P. The use of heuristic strategies in modelling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 315–326, 2018.

STENDER; P. STUHLMANN, S. **Fostering Heuristic Strategies in Mathematics Teacher Education**. INDRUM 2018, I NDRUM Network, University of Agder, Kristiansand, Norway, 2018.

SHAHBARI, J. A.; TABACH, M. Adopting the Modelling Cycle for Representing Prospective and Practising Teachers’ Interpretations of Students’ Modelling Activities. In: STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P. (Ed.). **Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education**. ICME-13 Monographs: Springer, 2016, p. 179-196.

YANEZ, J. C. Resolución y formulación de problemas. **REnCiMa**, v. 9, n. 1, p. 158-169, 2018.