DESENVOLVENDO O PROCESSO DE ABSTRAÇÃO POR MEIO DE UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO

DEVELOPING THE ABSTRACTION PROCESS THROUGH A TEACHING EXPERIMENT

Prof. Me. Michelle Andrade Klaiber
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – michelle@utfpr.edu.br

Prof. Me. Mariany Layne de Souza
Universidade Estadual de Londrina – marianylayne@gmail.com

Prof. Dra. Daniele Peres da Silva Martelozo
Universidade Estadual de Londrina – dani-peres@hotmail.com

Prof. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina – angelamarta@uel.br

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão e análise de indícios do Pensamento Matemático Avançado, sobretudo do processo de abstração segundo Dreyfus (2002), em um episódio de ensino. Através de uma Experiência de Ensino pautada na perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório, investigou-se a manifestação desse processo por estudantes ingressantes de um curso de Licenciatura em Química durante a realização de uma tarefa envolvendo matrizes, visando abordar transformações geométricas, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear. Os resultados mostram que, dos sete estudantes que participaram desse estudo, apenas dois mobilizaram os processos de generalização e de síntese, manifestando assim, o processo de abstração.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado, Matrizes, Álgebra Linear, Ensino Superior.

Abstract

This article presents a discussion and analysis of evidences of Advanced Mathematical Thinking, mainly of the abstraction process according to Dreyfus (2002), in an teaching episode. Through a Teaching Experience, based on the Inquiry-Based Learning perspective, investigated the manifestation of this process by students entering a course in Chemistry Degree during the accomplishment of a task involving matrices, aiming to approach geometric transformations, in the discipline of Analytical Geometry and Linear Algebra. The results show that, from seven students who participated in this study, only two mobilized the generalization and the synthesis process, thus, manifesting the abstraction process.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking, Matrices, Linear Algebra, Higher Education.

Introdução

Frequentemente nos deparamos com estudantes que ingressam no Ensino Superior hesitantes quanto à Matemática, pois não dominam conteúdos matemáticos essenciais para o processo de aprendizagem durante a graduação (LÓPEZ; MENDOZA; SILVA, 2010), ou ainda, apresentam dificuldades no questionamento e na justificação de técnicas utilizadas na resolução de problemas matemáticos e no estabelecimento de conexões entre conceitos matemáticos (LUCAS *et al.,* 2014).

A fim de lidar com essa situação muitos pesquisadores, como Ponte (2005), se debruçam em empregar, refletir e formular teorias a respeito do ensino e da aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, este artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado da primeira autora, que tem como objetivo estudar indícios de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado (PMA) em produções escritas de estudantes do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em Química, na disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear, por meio da realização de uma Experiência de Ensino.

A construção dessa Experiência de Ensino foi fundamentada em uma metodologia de ensino que oportunizasse aos licenciandos uma aprendizagem efetiva dos conteúdos de Matrizes e Sistemas Lineares, muitas vezes, já estudados na Educação Básica. Desse modo, para tal construção, nos orientamos em um trabalho de sala de aula que priorizasse tarefas exploratórias e investigativas, e momentos de discussão e reflexão por parte dos estudantes, configurando, de acordo com Ponte (2005), a perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório.

Assim, o presente artigo tem por objetivo discutir e analisar indícios de PMA, e em especial do processo de abstração, manifestados por estudantes durante a realização de um episódio de ensino – dentre os nove episódios que compõem a Experiência de Ensino citada anteriormente – no qual foram abordados conteúdos sobre Matrizes.

Iniciamos esse artigo abordando alguns aspectos teóricos que nortearam a realização da investigação, a saber, o Pensamento Matemático Avançado e o Ensino-Aprendizagem Exploratório. Em seguida, são apresentados os procedimentos metodológicos adotados bem como a elaboração e o desenvolvimento da tarefa, finalizando com as análises da produção escrita dos estudantes e nossas reflexões finais.

O Pensamento Matemático Avançado à luz de Dreyfus (2002)

Desde 1987, quando o termo *Pensamento Matemático Avançado* foi proposto pelo *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (HAREL, SELDEN, SELDEN, 2016), muitos pesquisadores – dentre eles, Tall (2002); Dubinsky (2002); Dreyfus (2002), entre outros – se dedicaram a caracterizá-lo e defini-lo, investigando e formulando teorias acerca de como os indivíduos constroem, compreendem e desenvolvem esse pensamento.

Para esta investigação tratamos de aspectos teóricos acerca de indícios do desenvolvimento do PMA na perspectiva do educador matemático Tommy Dreyfus (2002). Desse modo, nos próximos parágrafos nossas discussões seguem nessa direção.

Com relação aos processos cognitivos associados ao desenvolvimento do PMA, Dreyfus (2002), afirma em sua abordagem que esse pensamento nos indivíduos é resultante de ações que envolvem interações entre processos mentais, sendo divididos em dois processos principais: a representação e a abstração. A seguir comentaremos brevemente sobre cada um desses processos, todavia nossa atenção se voltará ao processo de abstração, discutido nas análises, ao qual apresentaremos caracterizações e apontamentos mais detalhados.

O processo de representação, de acordo com Dreyfus (2002), tem uma importante função na Matemática, visto que nele são utilizados muitos símbolos que correspondem a uma relação entre signos e significados. Já o processo de abstração, segundo o mesmo autor, necessita de dois pré-requisitos para ocorrer: os processos de generalização e de síntese.

A generalização consiste na transição de casos particulares para casos gerais, nas palavras do autor "generalizar é derivar ou induzir a partir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade" (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa). Enquanto a síntese consiste na combinação ou composição de partes do conhecimento de forma a constituir um todo que, segundo Dreyfus (2002), muitas vezes equivale a mais do que a soma de suas partes.

Em resumo, a abstração está estreitamente relacionada aos processos de generalização e de síntese, porém demanda por parte dos estudantes um esforço cognitivo maior, pois se baseia em um processo de construção de estruturas mentais a partir de propriedades e relações existentes entre os objetos matemáticos, desviando o olhar do próprio objeto (DREYFUS, 2002).

Desse modo, esse processo requer um pensar matematicamente mais refinado, pois "Quando um aluno desenvolve a capacidade de conscientemente fazer abstracções de situações matemáticas, ele alcança um nível mais avançado do pensamento matemático" (DOMINGOS, 2006, p. 7). Logo, esse processo permite que, além de utilizar regras e manipulações em álgebra e aritmética com sucesso, por exemplo, o estudante tenha habilidades em desenvolver relações entre os conceitos que estão sendo trabalhados em uma determinada situação, assim como, realizar conexões com outros conceitos em diferentes contextos.

De acordo com as discussões trazidas a partir de Dreyfus (2002), notamos que os processos de representação e abstração estão presentes nos diferentes níveis de ensino escolar, sendo que a característica que os difere, por exemplo, da Educação Básica para o Ensino Superior, está relacionada com a complexidade com que são tratados.

A perspectiva Ensino-Aprendizagem Exploratório

As ações da professora/pesquisadora (primeira autora do artigo) desde o planejamento da tarefa até as discussões e sistematizações dos conteúdos em sala de aula, foram orientadas pela perspectiva do Ensino-Aprendizagem Exploratório, abordagem segundo a qual o ensino ocorre de forma coletiva, por meio da interação entre os estudantes e o professor, que conduz momentos de discussão e reflexão de forma a explorar a atividade dos estudantes e o tempo de aula disponível (PONTE, 2005).

Posto isto, o episódio de ensino apresentado neste artigo foi planejado de acordo com as três fases propostas por Ponte (2005) para a organização de uma aula baseada no Ensino-Aprendizagem Exploratório da Matemática, sendo elas: (i) a introdução da tarefa; (ii) a realização da tarefa; e (iii) a discussão da tarefa e síntese final.

Na fase de introdução da tarefa, segundo o autor, o professor deve observar aspectos como a compreensão da tarefa pelos estudantes bem como a necessidade de inserção ou suspensão de algum elemento, informação ou ferramenta de trabalho, e a adequabilidade dos recursos e materiais utilizados.

Durante a realização da tarefa recomenda-se que o professor explore, na medida do possível, as situações que se desenvolvem no ambiente de sala de aula, como as intervenções e dúvidas dos estudantes, introduzindo e discutindo conceitos e procedimentos matemáticos. Nessa fase, o autor propõe também que o professor reformule seus objetivos e estratégias de ensino, se necessário.

E por fim, durante a fase de discussão e síntese final, o professor assume um papel de moderador gerenciando e orientando as intervenções dos estudantes, e aproveitando para "procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da Matemática" (PONTE, 2005, p. 16). Tal fase, segundo o autor, é fundamental para a construção de novos conhecimentos e significados a partir das tarefas exploradas.

Ponte *et al.* (2015) afirmam ainda que, uma abordagem exploratória da matemática deve priorizar o desenvolvimento do raciocínio matemático por meio de tarefas desafiantes, e de um ambiente de sala de aula no qual os estudantes possam construir, aprofundar e compreender conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Dessa forma, após a elaboração da tarefa, cabe então ao professor organizar e conduzir as discussões em sala de aula, explorando da melhor maneira possível a atividade dos estudantes.

Tendo em vista orientar o professor para os momentos de discussões, Stein *et al.* (2008) propõem cinco práticas para o trabalho em sala de aula, são elas: (i) antecipar as possíveis respostas do estudante a tarefas matemáticas cognitivamente exigentes; (ii) monitorar as respostas dos estudantes durante a exploração da tarefa; (iii) selecionar determinados estudantes para apresentar suas resoluções durante a fase de discussão e síntese; (iv) sequenciar as respostas dos estudantes que serão exibidas; e (v) estabelecer conexões matemáticas entre as respostas de diferentes estudantes e as ideias matemáticas que o professor deseja explorar.

Segundo Stein *et al.* (2008), cada uma das práticas do professor é uma extensão da prática anterior e usufrui de seus resultados, portanto, para usá-las de forma bem-sucedida, é necessária a escolha de uma tarefa cognitivamente exigente, que seu objetivo instrucional seja bem conhecido e que o professor compreenda indícios do pensamento e de práticas matemáticas dos estudantes.

Em vista disso, trazemos a seguir alguns aspectos sobre a elaboração a aplicação da tarefa – nosso instrumento de coleta para este trabalho.

Procedimentos Metodológicos

A pesquisa apresentada no presente artigo é de caráter qualitativo, visto que a investigação dos processos de ensino e de aprendizagem se dá em sua maior parte em ambiente natural – a própria sala de aula – onde são coletados os dados, e as análises são feitas de forma descritiva, priorizando o desenvolvimento desses processos e não o produto final da interação entre a professora, os estudantes e as tarefas (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Outra característica do estudo qualitativo, conforme os autores, é que o investigador constitui o instrumento principal da pesquisa, estando sempre que possível no local do estudo para não perder de vista o significado propiciado pelo contexto. Sendo assim, neste estudo a pesquisadora é também a professora que conduz as discussões em sala de aula.

Quanto ao *corpus* de análise do presente artigo, esse é composto por sete estudantes – nomeados de E10, E13, E17, E18, E19, E22 e E23. Tais estudantes não compõem o *corpus* de análise da pesquisa de doutorado da primeira autora, visto que não participaram de todos os episódios de ensino, sendo esse um dos critérios para tal escolha. Desse modo, continuaremos com os códigos adotados na referida tese, na qual, para manter o anonimato dos estudantes, adotou-se de forma aleatória a letra E e um número para diferenciá-los.

Assumindo as características mencionadas anteriormente, planejamos tarefas e discussões em sala de aula, antecipamos erros e dificuldades dos estudantes, e analisamos relações entre esses elementos orientados pelas perspectivas teóricas do PMA – teoria cognitiva segundo a qual analisaremos indícios do processo de abstração nas resoluções dos estudantes – e do Ensino-Aprendizagem Exploratório – perspectiva a partir da qual guiamos nossa prática pedagógica visando o desenvolvimento desse processo do PMA. A elaboração e a realização da tarefa serão discutidas nas seções seguintes.

<u>Elaboração da tarefa</u>

A tarefa, constituída por duas questões e intitulada "Transformações Geométricas no GeoGebra", foi elaborada com base na atividade investigativa proposta em Souza *et al.* (2014) voltada para estudantes do Ensino Médio, e tem como objetivo relacionar os conceitos de tipos de matrizes e operações com matrizes com as transformações geométricas no plano.

Nesse sentido, o *software* GeoGebra foi utilizado como um instrumento para a visualização e a investigação de tais transformações. Além disso, acreditamos que essa tarefa pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e de habilidades como o reconhecimento de padrões nos estudantes e no estudo das Transformações Lineares no decorrer da disciplina.

A questão 1 (Figura 1), da referida tarefa, explora a reflexão de um polígono em relação aos eixos x e y, e em relação à origem.

1- REFLEXÃO: Utilizando a ferramenta polígono, construa um trapézio escaleno no primeiro quadrante.

a) Construa a matriz R que representa os vértices da figura.

b) Utilizando a ferramenta reflexão em relação a uma reta, faça a reflexão da figura em relação ao eixo x.

c) Construa a matriz X que representa os vértices da figura refletida.

d) Compare as matrizes R e X e comente sobre suas observações. Há algum padrão?

e) Refaça os itens b, c e d agora considerando o eixo y para a reflexão. Chame a matriz obtida de Y.

f) Agora faça a reflexão da figura em relação à origem.

g) Analisando os três casos responda: é possível construir uma operação entre matrizes que faça a reflexão em relação ao eixo x? E em relação ao eixo y? E em relação à origem? Explique direitinho!

h) Desafio: Faça a reflexão em relação às retas y=x e y=-x e comente os resultados.

Figura 1 – Questão 1 da Tarefa

Fonte: a própria autora.

Trabalhando com a matriz dos vértices do polígono e observando as modificações ocorridas nessa matriz a cada reflexão, a questão propõe ao estudante investigar uma operação que efetue a transformação reflexão (no caso a multiplicação), e qual matriz que representa essa transformação.

A questão 2 (Figura 2) aborda a transformação translação. Por meio de uma sequência de passos, o estudante deve construir um polígono e um vetor que forneça a direção da translação desse polígono.

2- TRANSLAÇÃO: Construa um novo polígono e utilizando a ferramenta vetor construa um vetor fora do polígono.

a) Construa a matriz P que representa os vértices do polígono.

b) Utilize a ferramenta translação por um vetor para transladar a figura e construa a matriz T, chamada matriz de translação, que representa os vértices da figura transladada.

c) Compare as matrizes P e T, você encontrou algum padrão? Qual?

d) Construa uma operação entre matrizes que represente a translação feita.

e) Obtenha a matriz de translação obtida ao transladar a figura na direção do vetor com ponto inicial em (3,1) e final em (5,-3).

Figura 2 – Questão 2 da Tarefa

Fonte: a própria autora.

Após explorar essa transformação no GeoGebra é proposto ao estudante que investigue e construa a operação entre matrizes (no caso, adição ou subtração) que realiza a translação do referido polígono na direção de um vetor dado.

Tais questões, além de propiciarem o desenvolvimento de processos do PMA, como a representação, a tradução e a modelação, instigam o estudante a realizar processos mais avançados, relacionados à abstração, como a generalização – ao deduzir um método para efetuar a reflexão e a translação de um polígono qualquer –, e a síntese – ao reconhecer, a partir de um método algébrico para se obter as matrizes de cada transformação realizada, as matrizes de transformação para cada um dos tipos de reflexão estudados, assim como para a transformação translação. Sendo assim, as questões propostas aos estudantes constituem investigações, ou seja, são questões abertas que possuem um nível elevado de desafio (PONTE, 2005) e como tais,

> estimulam a formulação de questões, [...] exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo. Nesse caso, essas tarefas podem contemplar todos os processos do PMA. (BUSSMANN; KLAIBER; SILVA, 2017, p. 12)

Desse modo, buscamos na análise dessa tarefa indícios de processos avançados do PMA, como a generalização e a síntese.

<u>O episódio de ensino</u>

O episódio de ensino ocorreu no dia 14 de março de 2017, com a duração de 150 minutos (três horas aula), no qual foram estudados conceitos de transformações geométricas e matrizes, por meio de explorações realizadas no *software* GeoGebra, propostas na tarefa apresentada anteriormente. Nesse contexto, no laboratório de informática, os estudantes sentaram-se individualmente, um por computador, porém podiam conversar e discutir ideias com os colegas, alguns até se levantavam para isso.

Na sequência, descrevemos o encadeamento de ações desenvolvidas ao longo do episódio, segundo as fases propostas por Ponte (2005) para uma aula fundamentada no Ensino-Aprendizagem Exploratório da matemática.

Introdução da tarefa: inicialmente, a professora/pesquisadora explicou aos estudantes algumas noções sobre o *software* GeoGebra, já que a maioria deles não o conhecia, e se disponibilizou a tirar dúvidas sobre como utilizá-lo durante a resolução das tarefas. A seguir, foram entregues as questões impressas e os estudantes foram instruídos a anotar todos os passos e raciocínios utilizados na resolução. O tempo disponibilizado para as resoluções foi de 80 minutos.

A primeira questão da tarefa abordou a transformação reflexão. No item a, o estudante deveria construir um trapézio escaleno no primeiro quadrante do plano cartesiano e anotar a matriz que representa os vértices desse polígono. Logo de início, alguns estudantes questionaram a professora/pesquisadora sobre qual seria a forma de um trapézio escaleno, então a professora/pesquisadora fez a pergunta para turma, buscando alguém que soubesse a resposta. Alguns estudantes responderam desenhando no ar um trapézio qualquer, mas não sabiam dizer se era escaleno ou não, a professora/pesquisadora interveio e explicou que um trapézio escaleno é aquele em que os lados não paralelos apresentavam medidas diferentes e, na sequência, perguntou se ainda havia dúvidas sobre o polígono. Diante da negativa dos estudantes, prosseguiram as resoluções.

Já no item b, alguns estudantes apresentaram dificuldade na utilização, no *software,* da ferramenta "reflexão em relação a uma reta", então a professora/pesquisadora foi caminhando pelo laboratório e auxiliando-os individualmente, conforme a necessidade.

Realização da tarefa: a resolução dos primeiros itens da questão 1 seguiu sem muitos questionamentos, com a professora/pesquisadora auxiliando no uso do GeoGebra, até chegarem ao item g, no qual foi preciso descobrir as matrizes de reflexão e multiplicar pela matriz dos vértices do polígono.

Nesse momento, a maioria dos estudantes apresentou dificuldades, alguns estudantes tentavam encontrar uma matriz que somada a matriz dos vértices resultasse na matriz dos vértices da reflexão, então a professora/pesquisadora fez perguntas do tipo: "essa matriz vai servir para a reflexão de qualquer outro trapézio, como por exemplo, o do seu colega?". A intenção da professora/pesquisadora nesse momento era fazer com que os estudantes refletissem sobre a possibilidade de generalização do método utilizado, para que então tentassem um método diferente.

Outros estudantes confundiram a ordem das matrizes para que a multiplicação pudesse ser realizada ou não se recordavam do algoritmo de multiplicação de matrizes, então utilizaram procedimentos e estratégias incorretos para chegar ao resultado que queriam.

Quanto aos estudantes que se lembraram do algoritmo da multiplicação de matrizes, foram observadas algumas estratégias, como a utilização de matrizes diagonais para serem multiplicadas pelas matrizes dos vértices. Outra estratégia incomum foi a de um estudante que tentou multiplicar a matriz dos vértices, que era de ordem 2x4 por uma matriz 4x4 para realizar a reflexão, nesse caso, ele avaliou a dimensão das matrizes, mas estranhou a quantidade de cálculos necessários para verificar se a matriz escolhida estava correta. Após algumas tentativas, percebeu que poderia realizar a multiplicação de uma matriz 2x2 por uma 2x4, facilitando os cálculos.

Houve ainda, um estudante que encontrou uma matriz específica que forneceu o resultado desejado da multiplicação, mas que não serviria para realizar a reflexão em uma matriz que representasse um polígono qualquer.

Observamos que, apesar de em um episódio anterior a maioria dos estudantes ter realizado a multiplicação entre matrizes corretamente, muitos não dominavam e não compreendiam o algoritmo da multiplicação.

A questão 2 da tarefa abordou a transformação translação. Essa questão foi resolvida pelos estudantes sem maiores dificuldades com relação ao cálculo matricial, já que envolvia a adição ou subtração de matrizes e os estudantes compreendiam essas operações. Com relação ao GeoGebra, a professora/pesquisadora precisou auxiliar os estudantes no uso da ferramenta "vetor".

Discussão da tarefa e síntese final: durante as discussões foram apresentadas as resoluções que foram selecionadas pela professora/pesquisadora, priorizando diferentes estratégias – corretas ou incorretas – de forma a contribuir para a compreensão do conteúdo e para o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes.

Para a primeira questão, havia duas resoluções diferentes para o item g. Na primeira, o estudante multiplicou pela matriz dos vértices uma matriz específica, diferente da matriz da transformação reflexão para o eixo x, obtendo o resultado desejado. Nesse caso, um estudante interveio ao ver a resolução: "mas essa matriz ficou diferente da minha, pode acontecer isso?", a professora/pesquisadora respondeu com outra pergunta: "é possível que uma única matriz resulte na reflexão, em relação ao eixo x, de um polígono qualquer?". Nesse instante, outro estudante apontou para a segunda resolução apresentada, na qual foi utilizada a matriz da reflexão para o eixo x, e disse: "minha matriz ficou igual à da segunda resolução, e deu certo também, mesmo com a minha matriz dos vértices sendo diferente". E a professora/pesquisadora concluiu: "então, se fôssemos utilizar uma matriz para representar a reflexão em relação ao eixo x, para um polígono qualquer, essa matriz seria $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Está correto?" E os estudantes concordaram com a afirmação.

Na sequência, a professora/pesquisadora pediu para a turma que concluísse quais seriam as matrizes para as demais reflexões da questão (em relação ao eixo y, e à origem).

Na síntese final das aprendizagens, a professora/pesquisadora retomou as operações entre matrizes, relacionando-as com cada uma das transformações geométricas estudadas e com as respectivas matrizes de cada transformação.

Nesse momento, a professora/pesquisadora apresentou novamente o algoritmo da multiplicação de matrizes, chamando a atenção para o fato de a propriedade comutativa não ser satisfeita e para a condição de multiplicação entre duas matrizes. E perguntou: "se utilizássemos a matriz identidade na multiplicação, o que aconteceria com os vértices da figura?". Alguns estudantes responderam: "não mudariam", "ficariam iguais", e a professora/pesquisadora complementou: "vocês percebem que a matriz identidade é o elemento neutro na multiplicação de matrizes? Ou seja, qualquer matriz multiplicada por ela permanece igual."

Em seguida, a professora/pesquisadora apresentou alguns *slides* com as definições e exemplos dos tipos de matrizes e informou a todos que esse material, assim como os enunciados da tarefa e alguns exercícios, estaria disponível no ambiente virtual de aprendizagem para que, após a aula, os estudantes pudessem rever e repensar a relação de tais conteúdos com as explorações realizadas no GeoGebra.

Observamos que os estudantes, nesse episódio, mostraram-se mais familiarizados com a dinâmica de sala de aula, na qual a professora/pesquisadora, seguindo as práticas propostas por Stein *et al.* (2008), orientou as aprendizagens, sem fornecer respostas ou diminuir o desafio da tarefa, e os estudantes configuraram-se protagonistas na construção do conhecimento, explorando, refletindo e conjecturando.

Análises e resultados

Nessa seção, trazemos as discussões e análises desse episódio de ensino, abordando separadamente as questões 1 e 2. Num primeiro momento apresentamos algumas considerações referentes às descrições das resoluções dos sujeitos investigados para, num segundo momento, direcionarmos nossas análises acerca de manifestações do processo de abstração, à luz de Dreyfus (2002), conforme discutimos na seção 2.

<u>Questão 1</u>

Dentre os sete estudantes analisados, todos resolveram corretamente os itens a, b, c, e e f, porém, no item d, o estudante E17 não reconheceu o padrão de transformação da matriz R para a matriz X.

Quanto ao item g da questão, o estudante E18 obteve apenas a matriz da transformação reflexão em relação ao eixo x, apresentando indícios de uma possível generalização, levando em consideração o que diz Dreyfus (2002). Já o estudante E23 obteve todas as matrizes de transformação em relação aos eixos x, y e à origem, porém, ao apresentar a resposta final trocou o nome das matrizes, como é possível observar na Figura 3 a seguir:

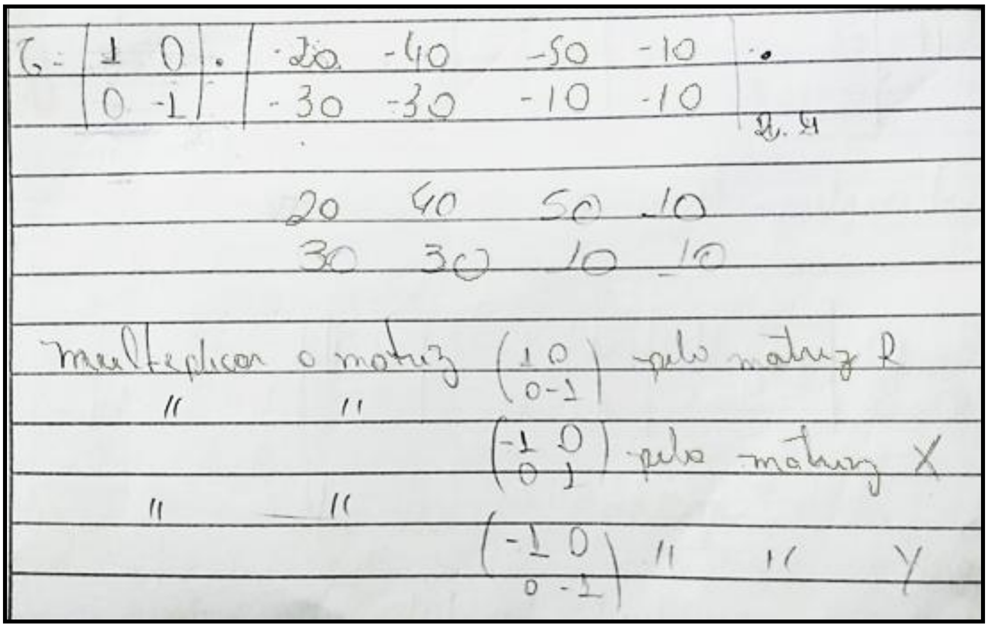


Figura 3 – Registro escrito questão 1 item g do estudante E23

Fonte: resolução entregue pelo estudante E23.

Consideramos que um estudante atingiu a generalização nesta questão se ele foi capaz de determinar algebricamente as matrizes das reflexões realizadas, ou seja, se ele induziu a partir da reflexão de um polígono específico um método para realizar algebricamente a reflexão de qualquer polígono dado, visto que "generalizar é derivar ou induzir a partir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade" (DREYFUS, 2002, p. 35, tradução nossa). Nesse sentido, compreendemos que a resolução do estudante E23 apresentou evidências do processo de generalização.

Os estudantes E13 e E17, ao tentarem obter a matriz de transformação, inverteram a ordem das matrizes, modificando o algoritmo da multiplicação para poderem encontrar a matriz da reflexão desejada. Além disso, eles utilizaram uma matriz específica para o caso particular que apresentaram no item a (Figura 4), não chegando, portanto, a uma generalização por meio da matriz de transformação das reflexões.

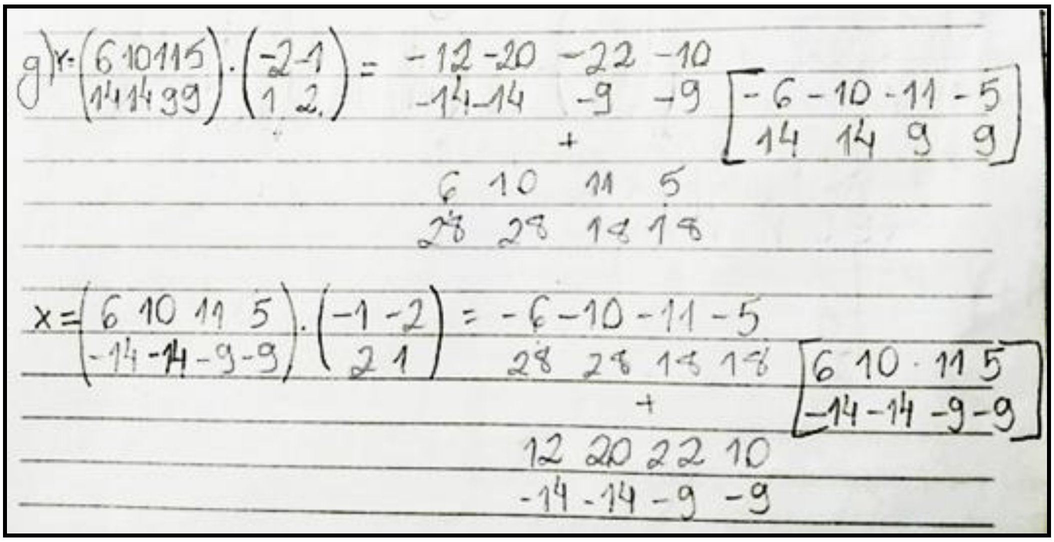


Figura 4 – Registro escrito questão 1 item g do estudante E17
Fonte: resolução entregue pelo estudante E17.

O estudante E19 obteve as matrizes das transformações de reflexão somente nos eixos x e y, apresentando a matriz de transformação adequada apenas para a reflexão no eixo x, porém também inverteu a ordem da multiplicação das matrizes, o que possivelmente causou confusão na utilização desse algoritmo (Figura 5).

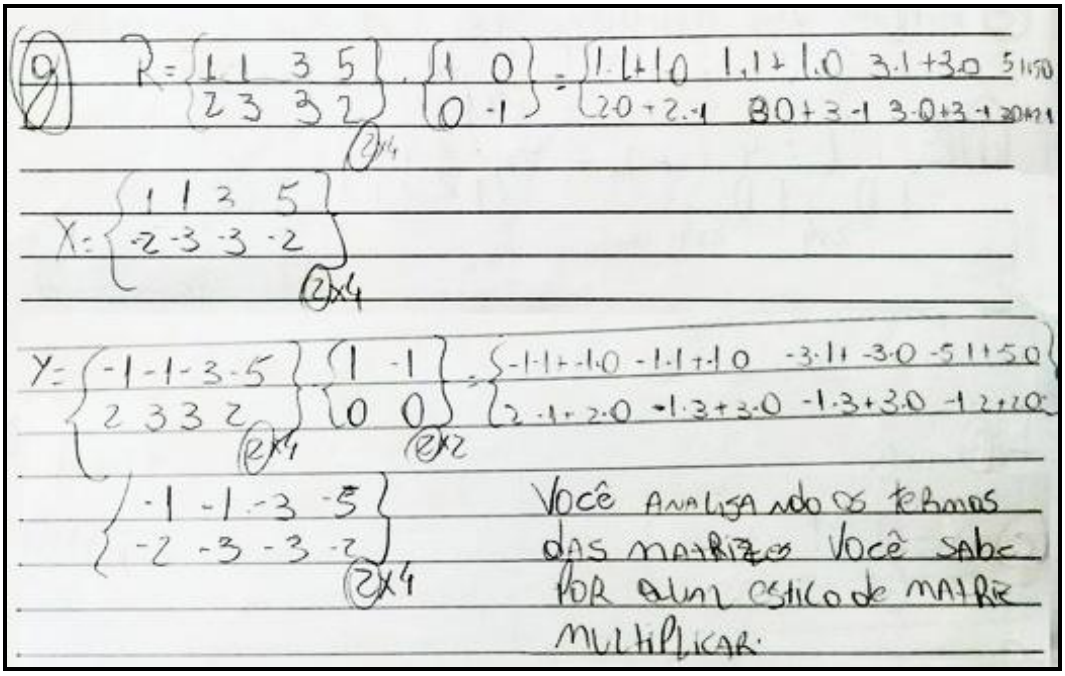
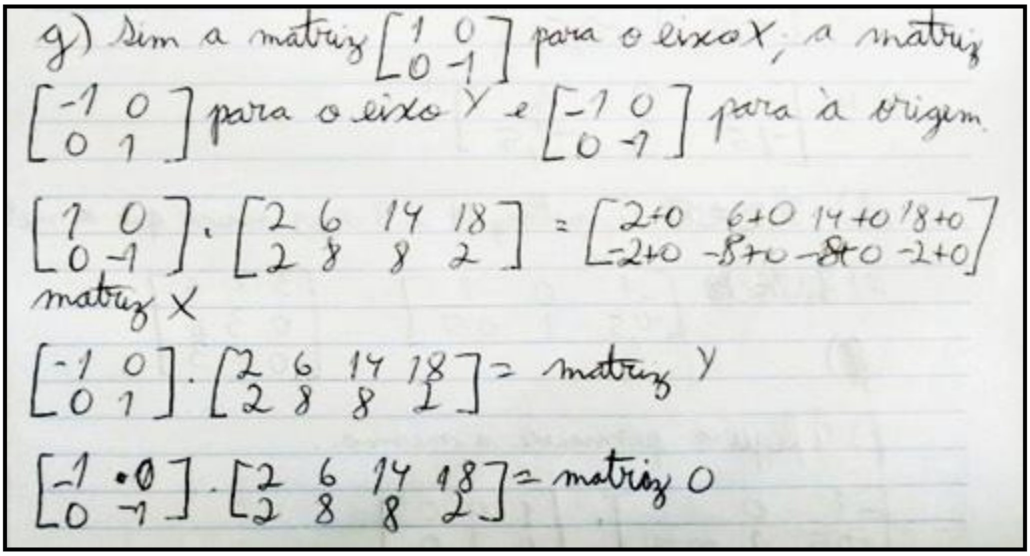


Figura 5 – Registro escrito questão 1 item g do estudante E19
Fonte: resolução entregue pelo estudante E19.

Destacamos que nos registros escritos dos estudantes E13, E17 e E19 há indícios de que esses possuem algum conhecimento sobre o procedimento adequado para a multiplicação de matrizes e percebem as relações entre as operações e a modificação na matriz a cada nova reflexão, porém, utilizaram a matriz da reflexão no eixo x, e não a matriz inicial R, para realizar a reflexão no eixo y. Apesar do equívoco na utilização do algoritmo, no *software* os estudantes realizaram as reflexões do polígono adequadamente, como foi observado pela professora.

No episódio anterior a este, os estudantes tiveram um contato com a multiplicação de matrizes em tarefas nas quais havia um contexto da área de Química envolvido. No entanto, no episódio aqui apresentado, as questões não possuem um contexto interdisciplinar e não apresentam a estrutura para as multiplicações que devem ser realizadas, ou seja, os estudantes tinham que determinar as matrizes e efetuar a operação citada. Tal fato pode justificar a maior dificuldade verificada na realização das multiplicações entre matrizes.

O estudante E10 apresentou todas as etapas da resolução para o item g de forma adequada (Figura 6). Avaliamos, então, que este evidenciou em sua resolução características, segundo Dreyfus (2002), do processo de generalização, bem como do processo de síntese, uma vez que esse estudante reconheceu, a partir de um método algébrico para se obter as matrizes das reflexões, as matrizes de transformação, para cada um dos tipos de reflexão apresentados.


g) Sim a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ para o eixo X, a matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para o eixo Y e $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ para à origem.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & 14 & 18 \\ 2 & 8 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 6+0 & 14+0 & 18+0 \\ -2+0 & -8+0 & -8+0 & -2+0 \end{bmatrix}$$

matriz X

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & 14 & 18 \\ 2 & 8 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \text{matriz } Y$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 6 & 14 & 18 \\ 2 & 8 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \text{matriz } O$$

Figura 6 – Registro escrito questão 1 item g do estudante E10

Fonte: resolução entregue pelo estudante E10.

Por fim, o estudante E22 não apresentou resolução para este item da questão.

Com base nessa breve descrição, podemos agora fazer algumas inferências que se relacionam com o foco deste artigo, os processos de abstração: generalização e síntese.

Os registros escritos evidenciam que ao resolverem os itens da questão, em geral, os estudantes estabelecem relações entre diferentes conceitos matemáticos, por exemplo: domínio na operação de multiplicação de matrizes e de operações aritméticas;

utilização de linguagens diferentes para resolver e representar as informações da tarefa; construção de matrizes a partir da representação geométrica de um polígono, entre outras.

Avaliamos que ao estabelecerem essas relações, três estudantes (E10, E19 e E23) manifestam indícios do processo de generalização, de acordo com a caracterização de Dreyfus (2002).

Mais que associar, combinar e gerenciar diferentes conceitos, como ocorre no processo de representação, o processo de síntese requer uma maior complexidade, pois demanda uma compreensão do todo, permitindo ao estudante fazer formulações, realizar abstrações (DREYFUS, 2002). Ainda de acordo com Dreyfus (2002, p. 36, tradução nossa), o processo de abstração está intimamente ligado à generalização, visto que "um dos principais incentivos para a abstração é a natureza geral dos resultados que podem ser obtidos". Logo, nossas análises para a questão 1 concluem que apenas a resolução do estudante E10 manifesta esses processos (síntese e generalização).

<u>Questão 2</u>

Para essa questão, analisamos as resoluções dos estudantes E10, E17, E18, E19, E22 e E23 apenas, visto que o estudante E13 não apresentou resolução para a questão, deixando-a em branco.

Nesta discussão, enfatizamos os itens c, d e e da questão, uma vez que os itens a e b solicitam somente que os estudantes transcrevam as matrizes formadas pelos vértices dos polígonos construídos no GeoGebra. Para o item a, os seis estudantes apresentaram resoluções adequadas. Com relação ao item b, os estudantes E17 e E18 apresentaram resoluções parcialmente adequadas, uma vez que erraram alguns elementos da matriz transladada.

O item c da questão solicita que os estudantes encontrem padrões ao comparar a matriz original (item a) com a matriz transladada (item b). Neste caso, esperávamos que, além de perceber padrões, como por exemplo, quanto à ordem das matrizes, que os estudantes identificassem nas matrizes um padrão referente ao deslocamento dos vértices do polígono transladado.

Nesse item, os estudantes E17, E18, E19 e E22 não identificaram o padrão esperado, sendo que desses, os estudantes E18 e E19 apenas descreveram em suas resoluções que ambas matrizes possuíam a mesma ordem (2x4). As produções escritas de E10 e E23 evidenciam que esses encontraram um padrão com relação às translações realizadas nas matrizes originais, assim, essas duas resoluções trazem indícios do processo de generalização, segundo Dreyfus (2002). Cabe salientar, que o estudante E23 ao construir sua justificativa, apresentou um equívoco ao descrever um deslocamento diferente do obtido no item b, como mostra a Figura 7.

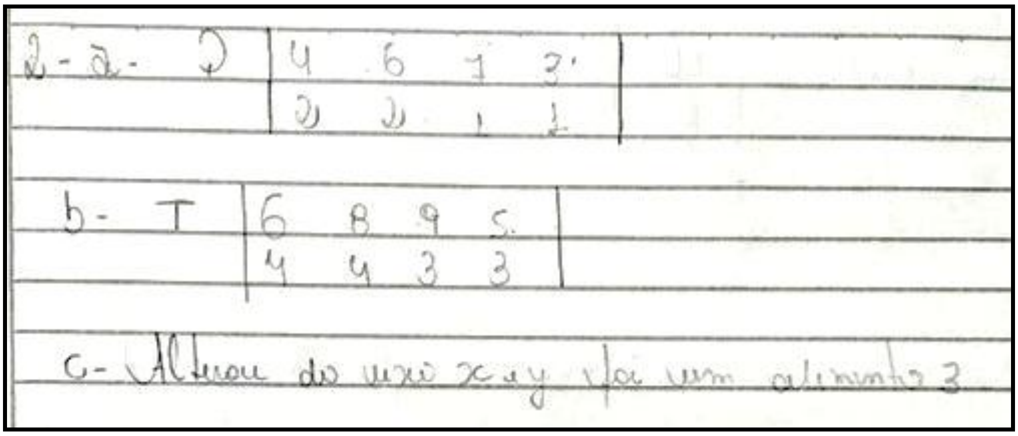


Figura 7 – Registro escrito questão 2 item c do estudante E23
Fonte: resolução entregue pelo estudante E23.

Para o item d da questão 2, que demandava a construção de uma operação entre matrizes a fim de representar a translação realizada, os estudantes E17 e E18 não apresentaram resoluções adequadas (Figura 8), visto que construíram adições entre matrizes que não representam a translação efetuada no item b.

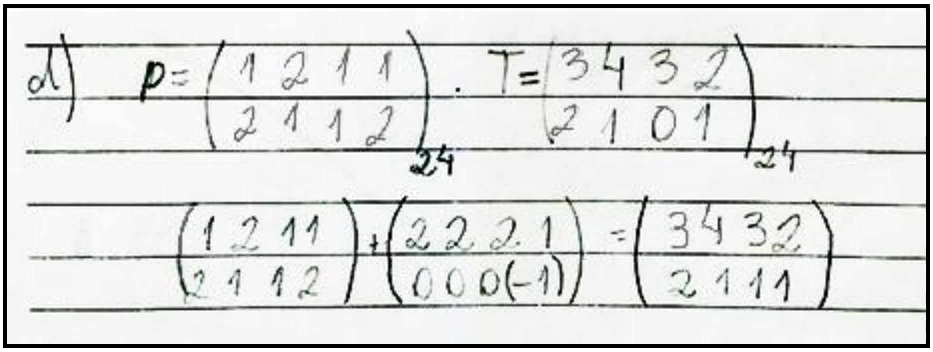


Figura 8 – Registro escrito questão 2 item d do estudante E17
Fonte: resolução entregue pelo estudante E17.

Nas resoluções dos estudantes E10 e E19 para o mesmo item, observamos que esses relacionaram o deslocamento realizado com a adição de um escalar a cada elemento da matriz, porém, utilizaram uma representação equivocada para essa operação, ou seja, adicionando uma matriz a um escalar (Figura 9).

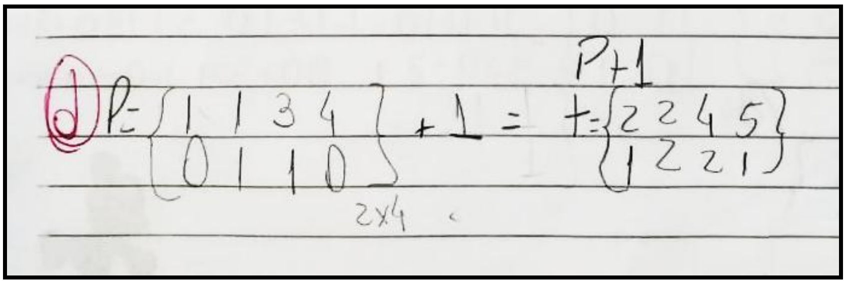


Figura 9 – Registro escrito questão 2 item d do estudante E19
Fonte: resolução entregue pelo estudante E19.

Por fim, os estudantes E22 e E23 apresentaram resoluções adequadas para esse item, como está evidenciado na Figura 10.

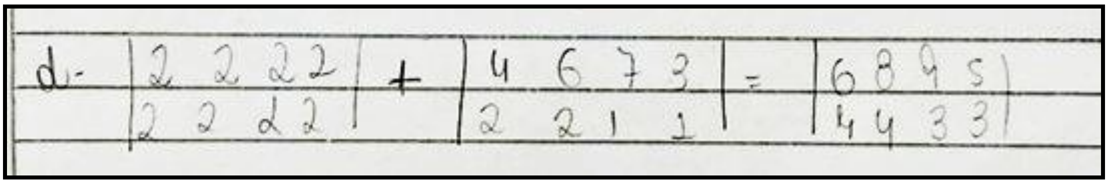


Figura 10 – Registro escrito questão 2 item d do estudante E23
Fonte: resolução entregue pelo estudante E23.

Avaliamos que as resoluções desses estudantes (E10, E19, E22 e E23), mesmo que apresentando equívocos quanto à representação matricial (E10 e E19), apontam características do processo de generalização, conforme mostra Dreyfus (2002), ao representarem, por meio de uma adição de matrizes, a transformação geométrica translação.

Para o item e, os estudantes E10 e E22 apresentaram resoluções adequadas (Figura 11), realizaram a translação da matriz segundo as coordenadas do vetor fornecido e construíram a matriz dos vértices do polígono transladado. Porém, observamos um erro cometido por ambos estudantes no sinal da primeira coordenada do vetor, o que acreditamos não interferir na compreensão da questão.

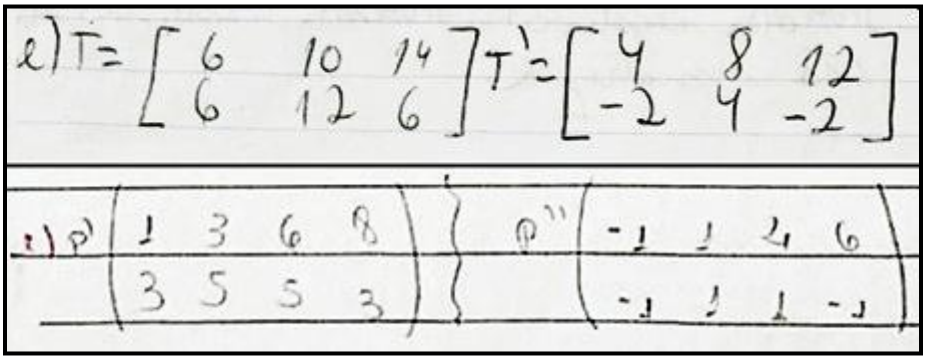


Figura 11 – Registro escrito questão 2 item e dos estudantes E10 e E22
Fonte: resoluções entregues pelos estudantes E10 e E22.

Esses dois estudantes apontam por meio de suas resoluções o estabelecimento de relações entre os conceitos envolvidos nessa questão, sobretudo, nesse item, obtiveram a matriz translação ao transladar o polígono na direção de um vetor dado, generalizando um método algébrico para o cálculo dessa transformação. Dessa forma, evidenciam uma compreensão do objeto em estudo, bem como do processo de síntese (DREYFUS, 2002).

Os demais estudantes não obtiveram a matriz de translação correta, apresentando em suas resoluções indícios de dificuldades na obtenção das coordenadas do vetor de translação. Em alguns casos, as matrizes construídas, apontam para translações diferentes da proposta no enunciado desse item da questão, como evidenciado na resolução do estudante E19 (Figura 12), na qual ele adiciona -5 unidades à coordenada x e 5 unidades à coordenada y de cada vértice do polígono.

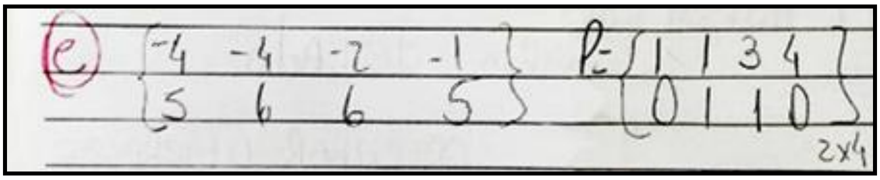


Figura 12 – Registro escrito questão 2 item e do estudante E19
Fonte: resolução entregue pelo estudante E19.

Por fim, para essa questão, tendo em vista os apontamentos apresentados referentes às resoluções desses seis estudantes, discutidas e analisadas com relação aos processos de generalização e de síntese, os registros escritos evidenciam que quatro estudantes (E10, E19, E22 e E23) revelam indícios do processo de generalização, e dois estudantes (E10 e E22) indícios do processo de síntese. Portanto, E10 e E22, demonstram, além de regras e manipulações, a identificação e construção de relações entre conceitos propostos na situação problema, manifestando assim, características do processo de abstração, sendo esse, composto pelos processos de generalização e de síntese, conforme Dreyfus (2002).

Considerações Finais

Fundamentados nos referenciais teóricos adotados para este estudo, enfatizamos a necessidade de que estudantes tenham experiências e habilidades matemáticas a fim de mobilizar o desenvolvimento do processo de abstração, levando-os às características do PMA.

Nossas análises revelam essa necessidade, uma vez que muitos dos estudantes analisados apresentaram dificuldades com algoritmos memorizados, sem uma compreensão sobre suas aplicações. Como exibido nas análises, para as duas questões da tarefa, identificamos, levando em conta as ideias de Dreyfus (2002), que apenas dois estudantes (E10 e E22) manifestaram indícios do processo de abstração, processo esse tão necessário para a aprendizagem de conteúdos matemáticos avançados no Ensino Superior. Sendo que o E10 apresentou indícios desse processo nas duas questões da tarefa do episódio de ensino analisado.

Encerramos essa discussão e reflexão, propondo um questionamento: que elementos considerar a fim de investigar indícios do desenvolvimento do pensamento matemático avançado? Tendo em mente esse questionamento, acreditamos que fomentar abordagens, como a apresentada nesse artigo, que mobilizem esse pensamento, e investigar como os estudantes desenvolvem processos referentes ao PMA pode ser um caminho frutífero a fim de contribuir para o ensino e a aprendizagem da Matemática, especialmente, no Ensino Superior.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) pelo apoio na realização do presente trabalho.

Referências

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.** Portugal: Porto Editora, 1994.

BUSSMANN, C. J. C.; KLAIBER, M. A.; SILVA, D. P. **Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula.** In: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 14*., 2017. Cascavel. *Anais...* Cascavel: Unioeste, 2017. p. 1-13.

DOMINGOS, A. **Teorias cognitivas e aprendizagem de conceitos matemáticos avançados.** In: SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 17., 2006, Setúbal. *Actas…* Setúbal: Associação de Professores de Matemática, 2006.

DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, D. (Org.), **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 25-41.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.), **Advanced mathematical thinking.** Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. p. 95-123.

HAREL G.; SELDEN, A.; SELDEN J. Advanced mathematical thinking: some PME perspectives. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (Ed.) **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future.** Rotterdam: Sense Publishers, 2006. p. 147–172.

LÓPEZ, V. L. U.; MENDOZA, J. J. A.; SILVA, D. G. M. Algunas causas que determinan el bajo rendimiento académico en el curso de álgebra lineal. **Scientia et Technica**, n. 44, p. 286-291, 2010.

LUCAS, C. O. *et al*. Aspectos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e Espanha: Análise de um Questionário. **Educação Matemática Pesquisa***,* São Paulo, v.16, n.1, p.1-24, 2014.

PONTE, J. P. Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular***.* Lisboa: APM, 2005. p.11-34.

PONTE, J. P. *et al.* Exercícios, problemas e explorações: Perspectivas de professoras num estudo de aula. **Revista Quadrante.** Lisboa, v. 24, n. 2, p. 111-134, 2015.

SOUZA, P. de A. *et al.* **Transformações Geométricas: uma investigação matemática por meio do GeoGebra.** In: SIMPÓSIO NACIONAL DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, 4., 2014. Ponta Grossa. *Anais...* Ponta Grossa: Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2014. p. 1-10.

STEIN, M. K. *et al*. Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 10, n. 4, p. 313-340, 2008.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking.** Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers. A. J. Bishop, Cambridge, U. K, 2002.