DESENVOLVENDO HABILIDADE DE REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA POR MEIO DE QUEBRA-CABEÇAS ESPACIAIS

DEVELOPING ABILIITY OF GEOMETRIC REPRESENTATION BY SPACIAL PUZZLE

Prof. Dr. José Carlos Pinto Leivas
Universidade Franciscana, leivasjc@ufn.edu.br

Resumo

Apresenta-se, no presente artigo, parte de uma pesquisa qualitativa, a qual teve como questão norteadora analisar como estudantes de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática podem desenvolver habilidades de representação espacial. Para isso, utilizou-se atividades investigativas em que os participantes faziam seus registros escritos, bem como alguns registros fotográficos. Para o tratamento dos resultados foi empregada a Análise Textual Discursiva, sendo que, até onde foi possível perceber, os investigados puderam desenvolver representações de objetos a partir de composição de sólidos constantes de *kits* fornecidos pelo pesquisador. Como conclusões, pode-se afirmar que foi possível desenvolver visualização e relações entre volumes, especialmente a chegada ao Princípio de Cavalieri.

Palavras-chave: representação visual; geometria espacial; quebra-cabeças.

Abstract

This paper presents a qualitative research carried out with students of a Postgraduate Program in Teaching Science and Mathematics, which had the guiding question analyses how students of a postgraduate program in mathematics teaching can develop spatial representation skills. For this purpose, investigative activities were used in which the participants made their written records as well as some photographic records. For treatment of the results it was used the Discursive Textual Analysis and, as far as it was possible to perceive, the investigated ones were able to develop representations of objects from the solid composition of the kits provided by the researcher. As partial conclusions can be affirmed that it was possible to develop visualization and relations between volumes, especially the arrival of the Cavalieri Principle.

Keywords: visual representation; spatial geometry; puzzle.

Introdução

Quando se afirma que a geometria não recebe maior atenção no âmbito escolar, às vezes, isso parece ser discurso dos educadores matemáticos da área. No entanto, ao consultar o banco de teses da Capes[1], com busca pela expressão “representação AND espacial”, nos anos de 2015-2016, foram localizadas 134 dissertações e 65 teses. Restringindo esses dois gêneros acadêmicos à Grande Área de Ciências Exatas e da Terra, o número cai, respectivamente, para 29 e 13. Ao incluir a área de conhecimento Matemática, restringe-se a 4 dissertações de mestrado e nenhuma tese de doutorado

[1] hIIttp://bancodeteses.capes.gov.br/banco-teses/#!

assim distribuídas: Geometria e Topologia (2); Ensino de Matemática (1); Matemática (1); todas elas em programas de Matemática em Rede Nacional - Mestrado Profissional.

A primeira, desenvolvida na Fundação Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, teve por título ‘Geometria espacial de posição: do concreto ao raciocínio dedutivo com uma passagem pela tecnologia’. A segunda, realizada na Universidade Federal do Pará, teve por título ‘Realidade aumentada aplicada ao ensino de geometria espacial: um desafio para a educação matemática’**.**

Na terceira, encontrada na Universidade Federal do Rio de Janeiro, o título foi ‘Fita de Moebius: desenrolar de matemática superior no Ensino Médio’. Por fim, a quarta, realizada na Universidade Federal do Ceará, intitulou-se: ‘Trabalhando poliedros através de aprendizagem cooperativa utilizando softwares’**.**

Outras buscas como, por exemplo, indicando “ensino AND geometria espacial”, não encontraram nenhuma ocorrência de tese no mesmo período anterior.

Foi procurado nas revistas Ciência e Educação e na Bolema, Qualis A1, pela palavra-chave no título *representation in spatial geometry* e não foi localizado nenhum artigo. O mesmo ocorre com a palavra-chave em português.

Ainda no que diz respeito ao tema da investigação, fez-se um levantamento nos Seminário Internacional de Pesquisa em Ensino de Matemática-SIPEM, desde o primeiro, em 2000, até o sexto, em 2015, no GT4 – Ensino Superior da SBEM, de pesquisas que tinham no título a palavra ‘geometria’. O Quadro 1 ilustra os dados encontrados:

Quadro 1. Levantamento de trabalhos nos SIPEM relativos ao GT4.

SIPEM	PUBLICAÇÃO	COM A PALAVRA GEOMETRIA
I	13	-
II	14	-
III	49	-
IV	24	3
V	20	1
VI	16	1

Fonte: autoria própria

No primeiro SIPEM, como é mostrado no Quadro 1, nenhum artigo apresenta, no título, a palavra geometria, sendo que o intitulado “O ensino de vetores e o uso do *Cabri-Geométre*”, talvez, chamasse para a área que se pretende analisar neste trabalho. Na segunda edição, o único artigo que trata de algum aspecto geométrico intitula-se “Um estudo sobre a interpretação geométrica da derivada por estudantes universitários”.

Os anais do III SIPEM não separaram as produções do GT4 e do GT5, mas, do total de 49 artigos, nenhum trouxe a palavra geometria no seu título. Numa rápida passagem pelos GT2 e GT3 – Educação Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, encontram-se dois artigos: ‘Argumentação no ensino da Geometria em livros didáticos nas séries finais do Ensino Fundamental' e 'A formação conceitual em Geometria: uma análise sobre polígonos e poliedros'.

Durante o IV SIPEM foi localizado o artigo 'A transição do Ensino Médio e Superior: as noções de Geometria Analítica'. Chamou a atenção o título do artigo 'Concepções de estudantes sobre as representações gráficas', por vir ao encontro do tema deste estudo. Entretanto, uma vista geral no resumo mostrou que o mesmo abordou as curvas de níveis com tratamento pelo Cálculo Diferencial e Integral. O artigo 'Imaginação, intuição e visualização na formação de um pensamento geométrico avançado' levou à busca do resumo, constatando verificar-se de um artigo com tratamento geométrico. Também não localizamos artigos no GT do Ensino Fundamental e Médio, incluindo a palavra-chave utilizada na busca.

No V SIPEM, dentre os 20 trabalhos publicados, foi encontrado apenas um artigo envolvendo geometria. Da mesma forma, na VI edição do evento, de um total de 16 publicações, encontrou-se, novamente, apenas uma pesquisa sobre o tema. Há de se especificar que, nas três últimas ocorrências, os trabalhos encontrados são do autor deste artigo.

As buscas realizadas levam à afirmação de que a geometria, no Ensino Superior, é um campo aberto a investigações mais aprofundadas em teses/artigos/eventos. Nesses gêneros acadêmicos, originalmente, se espera que sejam apresentadas propostas inovadoras, com metodologias diferenciadas e que possam permitir um avanço no ensino dessa disciplina em todos os níveis, particularmente, neste momento, em que se busca compreender de que forma os indivíduos fazem o uso da representação.

Piaget e Inhelder (1993) indicam uma simultaneidade entre a oposição, a continuidade das formas perceptivas e a representação figurada dessas formas. Para eles, uma coisa é perceber, visualmente, uma figura geométrica, e a outra é obter tais formas por meio da exploração tátil, reconstruindo a imagem mental correta de tal ente. Na construção do espaço, pela criança, "a imagem não resulta apenas da percepção" (p. 53). Ela necessita, também, da representação intuitiva, segundo os autores. Para isso, é necessário começar a construção do espaço pelo plano perceptivo, prosseguindo no plano representativo, para compreender a passagem de um desses planos para o outro, a fim de ocorrer a intuição espacial de forma representativa.

Talvez, por não haver a construção do espaço representativo na infância a partir da percepção, seja ela uma das razões de a geometria despertar tão pouco interesse na sequência do desenvolvimento intelectual dos estudantes, inclusive em nível de pós-graduação. Dessa forma, justifica-se a presente pesquisa, que teve como questão norteadora: como estudantes de um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática podem desenvolver habilidades de representação espacial?

Pressupostos teóricos

Quando se busca aprender ou ensinar a geometria, uma das preocupações que se apresenta é averiguar o significado que tem o símbolo de algum elemento geométrico, ou seja, quais as relações e conceitos estão ali estabelecidos. Arcavi (2005), ao inspecionar comportamentos de estudantes em diversas situações e áreas da Matemática, afirma ser possível buscar um sentido aos símbolos, o que não é simples, ou seja, é uma sensação complexa e multifacetada, nas palavras do autor. Para ele, “os símbolos podem desempenhar papeis distintos em contextos e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças” (*Idem*, s.n.). Dessa forma, uma representação de um objeto geométrico por um símbolo pode vir carregada de significados e auxiliar no ensino em diferentes contextos, especialmente, nos geométricos, aos quais se irá referir neste artigo.

A ideia de sentido dos símbolos, para esse autor, dá abertura a várias discussões, reflexões e pesquisas, das quais destaca-se aqui:

> [...] como se desenvolve em especialistas o sentido dos símbolos? É uma questão nata ou adquirida? Se é adquirida, quais seriam os papeis do ensino e, poderíamos considerar o sentido dos símbolos não somente como uma aptidão de especialistas senão esperar também dos iniciantes e em que medida? (ARCAVI, 2005, s.n.).

A primeira questão citada pelo autor é pertinente e atual, o que pode ser consequência da falta de metodologias de ensino adequadas, as quais, algumas vezes, não são desenvolvidas na formação inicial do professor de Matemática.

A utilização de recursos materiais didáticos, conectados ao conteúdo, parece ser um caminho que permite a construção do conhecimento geométrico, particularmente no que diz respeito às representações Botas e Moreira (2013) indicam, na atualidade, ser aceito que “ser matematicamente competente corresponde à conjunção de conhecimentos, atitudes, capacidades e competências” (p. 253). As autoras concluem seu estudo identificando ideias de professores a respeito do material didático, o qual está ligado à manipulação individual, além de auxiliar o aluno na sua aprendizagem, agindo como elemento motivador. Além disso, os professores investigados indicam que “os materiais didáticos melhoram a compreensão dos conteúdos de forma lúdica e possibilitam ao aluno a construção do seu conhecimento” (p. 273).

Ao que tudo indica, isso vai ao encontro do que Piaget e Inhelder (1993) apontaram a respeito da intuição das formas no desenvolvimento espacial na infância, aspecto que consiste no domínio entre a percepção e a imagem. Os autores citam experiências em que a criança, pela percepção tátil, apalpa, descreve e representa, respectivamente, objetos colocados fora do seu alcance visual. Segundo os autores, tais problemas apresentam dois aspectos interessantes, isto é: primeiramente, traduzir as percepções táteis em percepções visuais e, em segundo lugar, “construir imagens visuais para exprimir os dados táteis e os resultados dos movimentos de exploração” (p. 35).

Na pesquisa realizada por Vieira e Allevato (2015, p. 49), os alunos investigados, “em um primeiro contato com os sólidos geométricos, e expressões como prismas, pirâmides e corpos redondos”, classificaram grupos de objetos geométricos em “figuras pequenas”, com o auxílio da Teoria de Van Hiele. Para isso, exploraram objetos geométricos concretos e concluíram: “Assim, pudemos notar que ao elaborarem essa primeira classificação os alunos, apoiados fortemente em aspectos visuais das figuras, já apresentaram a preocupação em separar os cilindros pelo fato dessas figuras não apresentarem as faces planas”. (p.49)

Os mesmos autores, em outra investigação com o emprego da Análise Textual Discursiva, a exemplo do que ocorre no presente artigo, analisaram os diálogos dos estudantes durante a realização/exploração de tarefas relativas ao conteúdo geométrico, definindo categorias. Essas tarefas "[...] possibilitaram, além da aprendizagem de conteúdos específicos relativos à Geometria escolar, a emergência de diversas estratégias de resolução e o desenvolvimento de habilidades relacionadas aos processos de argumentação e comunicação matemática" (VIEIRA e ALLEVATO, 2018, p. 62).

Villiers e Schumann (s.d) ilustram o episódio: 'Um surpreendente resultado 3D envolvendo um hexágono' para mostrar a importância dos recursos visuais dinâmicos na aprendizagem de geometria. Para os autores, tais materiais podem levar a conjecturas imprevisíveis.

> Este pequeno episódio ilustra como algumas explorações experimentais com software 3D de geometria dinâmica (bem como algumas dobragens de papel) ajudaram a levar a uma conjectura imprevista (pelo menos para nós), que fornece um bom problema para desafiar os alunos do ensino médio ou até professor de matemática, como é relativamente fácil de provar. As tecnologias de computação disponíveis estão agora tornando muito mais viável e fácil trazer investigações em 3D, como na sala de aula.2 (trad. nossa, s.d.)

Os autores não somente indicam os softwares, mas também reforçam a 'dobragem de papel', recurso que, anteriormente à Geometria Dinâmica, era mais explorado para o ensino, juntamente com os instrumentos de Desenho Geométrico.

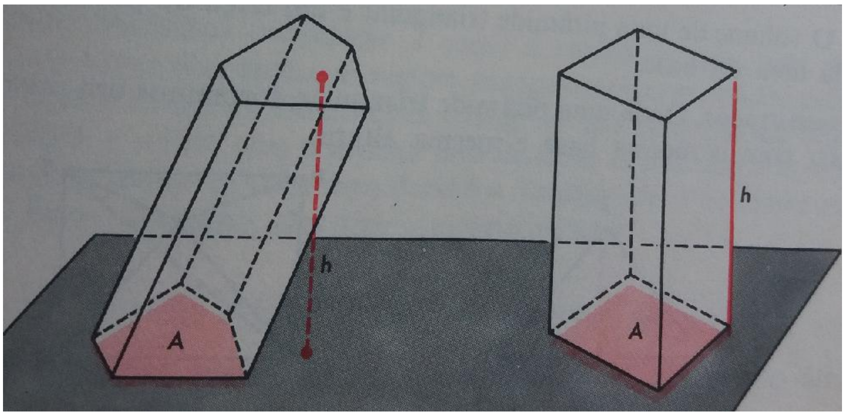
Kaleff (1998), em sua longa experiência com o ensino de geometria, questiona seus leitores a respeito de estarem preparados para o ensino de poliedros, ao que se acrescenta: e para o ensino de geometria? Será que estudantes de pós-graduação adquiriram essa preparação na formação inicial? Os questionamentos vão ao encontro do que Arcavi (2005) indicou como pesquisas emergentes na aquisição do sentido do símbolo, bem como ao que referenda o levantamento feito pelo autor deste artigo.

Dentre as inúmeras contribuições para estudantes em formação inicial e continuada, Kaleff (1998) indica um recurso didático para promover o desenvolvimento de visualização geométrica constituído de módulos instrucionais "que privilegiam técnicas de representação e interpretação geométricas" (p. 13). Na presente pesquisa, da qual se faz um recorte para este artigo, foram adaptados alguns quebra-cabeças geométricos para a investigação. Esses materiais conduziram a relações entre volumes de tetraedros regulares, não regulares, pirâmides de base quadrada, octaedros, intersecções, incluindo aí o Princípio de Cavalieri, e chegada ao volume de pirâmides e cubos. Usualmente, esse

[2] This little episode illustrates how some experimental explorations with 3D dynamic geometry software (as well as some paper folding) helped lead to an unanticipated conjecture (at least for us), which provides a nice problem with which to challenge high school learners or even prospective mathematics teacher, as it is relatively easy to prove. Available computing technologies is now making it much more feasible and easy to bring 3D investigations such as into the classroom. Michael de Villiers. Home page: http://dynamicmathematicslearning.com/homepage4.html;
Heinz Schulmann. University of Education Weingarten, Germany. Capturado em 28fev.2018.

princípio é anunciado em livros de geometria e nos de Ensino Médio, em forma de postulado com uma ilustração canônica, como é encontrada em Moise e Downs (1967, p. 507): “São dados dois sólidos e um plano. Suponha que todo plano, paralelo ao plano dado, interceptando um dos dois sólidos, também intercepta o outro, dando seções transversais de mesma área. Então, os dois sólidos têm o mesmo volume” (Figura 1).

Figura 1. Princípio de Cavalieri.



Fonte: Moise e Down (1967, p.507).

Na sequência apresenta-se o recorte parcial da pesquisa.

A pesquisa em si com a metodologia e análise de dados

Neste item fundamenta-se teoricamente a pesquisa, a qual foi realizada no primeiro semestre letivo de 2018, envolvendo cinco alunos de doutorado e dois de mestrado, regularmente matriculados em uma disciplina de geometria, de cunho optativo, ofertada em um Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. As atividades, constantes deste artigo, foram realizadas em um encontro de quatro horas-aula uma vez que, pela limitação de texto, não seria possível analisar o conjunto da obra.

O Quadro 2 sintetiza os componentes do grupo e os respectivos codinomes, a fim de preservar suas identidades.

Quadro 2. Os participantes da pesquisa.

Identificação	Situação no curso
A	Professor do ensino superior, aluno de doutorado
B	Professor do ensino médio, aluno do doutorado
C	Professor do ensino superior, aluno de doutorado
D	Professor do ensino básico médio integrado
E	Professor do ensino básico, aluno do doutorado
F	Não atua como professor, aluno de mestrado
G	Não atua como professor, aluno de mestrado

Fonte: autoria própria

Os estudantes A e B ingressaram no doutorado no ano de 2017, enquanto C, D e E, em 2018. F e G são estudantes de mestrado, com ingresso em 2017. Chama atenção o fato dos estudantes B e C terem cursado a disciplina durante a formação de Mestrado, com o mesmo professor. Questionados a respeito de voltarem a cursá-la, responderam que necessitam ter mais subsídios para a prática profissional.

A pesquisa iniciou nos dois primeiros encontros da disciplina, com a duração de quatro horas aula cada, sendo que o professor investigador elegeu trabalhar com um conteúdo e metodologia que não havia sido desenvolvido quando os dois estudantes haviam cursado a disciplina, a saber, representação espacial. Esse tema foi trabalhado com vistas a desenvolver relações entre volumes de sólidos e, para tal, utilizou o recurso didático quebra-cabeça geométrico, adaptado de Kaleff (1998). O docente distribuiu a cada aluno, individualmente, um *kit* (Figura 2) envolvendo: tetraedros regulares e não regulares, pirâmide de base quadrada (as quais poderiam ser formadas por dois tetraedros não regulares), octaedro (o qual poderia ser formado por duas pirâmides de base quadrada, uma pirâmide e dois tetraedros não regulares, quatro tetraedros não regulares ou somente o próprio sólido) e a planificação de um cubo.

Figura 2. *Kit* com as peças do quebra-cabeças.

Fonte: material do arquivo pessoal do investigador.

A partir da entrega dos *kits*, foi distribuída uma questão para estimular a curiosidade dos participantes e realizar, posteriormente, as atividades: vocês imaginam colocar todas essas peças dentro da superfície cúbica? Face à incredibilidade de todos, informou que seria essa a meta a ser atingida nas próximas aulas. Também, perguntou se conheciam o Princípio de Cavalieri e todos responderam que já o haviam estudado, embora nem todos lembrassem de seu enunciado/significado. O professor informou que não era esse o objetivo nesse momento, e sim que iriam trabalhar com as representações das peças, seus elementos e, principalmente, as relações envolvendo volumes.

Na sequência, o pesquisador distribuiu orientações para a realização da atividade e registro de conclusões, as quais são objeto de análise na presente pesquisa, que também conta com alguns registros fotográficos. Em virtude da limitação de espaço, não será possível analisar todas elas e nem as realizadas por todos os participantes.

Considera-se que desenvolver um estudo no qual os sujeitos envolvidos realizam atividades orientadas pelo investigador, as registram em fichas previamente elaboradas e elaboram suas percepções e conclusões constitui uma pesquisa qualitativa, no sentido apontado por Moreira (2011). Para esse autor, "O interesse dessa pesquisa está em uma interpretação dos significados atribuídos pelos sujeitos à suas ações em uma realidade socialmente construída, através de observação participativa". (p. 76).

Considerando-se que os participantes registraram as atividades em linguagem natural e por meio de representações figurais, torna-se necessário ao investigador analisá-las à luz de uma teoria que permita a interpretação convincente desses dados. Isso conduziu à escolha da teoria da Análise Textual Discursiva – ATD –, de Moraes e Galiazzi (2011).

Segundo os autores, a teoria se organiza em quatro focos: desmontagem do texto, a qual corresponde a examiná-lo em seus detalhes, fragmentando-o para obter unidades que estejam associadas aos fenômenos em estudo; estabelecimento de relações, um processo envolvendo relações entre estas, combinando-as e classificando-as, ou seja, definindo categorias; captando o novo emergente, que possibilita uma compreensão renovada do todo. A partir da análise decorrente desses focos e da compreensão do todo de forma renovada, isso irá originar uma nova combinação dos elementos construídos até então; um processo auto-organizado em que o ciclo de análise pode ser compreendido como um processo, do qual emergem novas compreensões, cujos resultados finais, criativos e originais, não podem ser previstos.

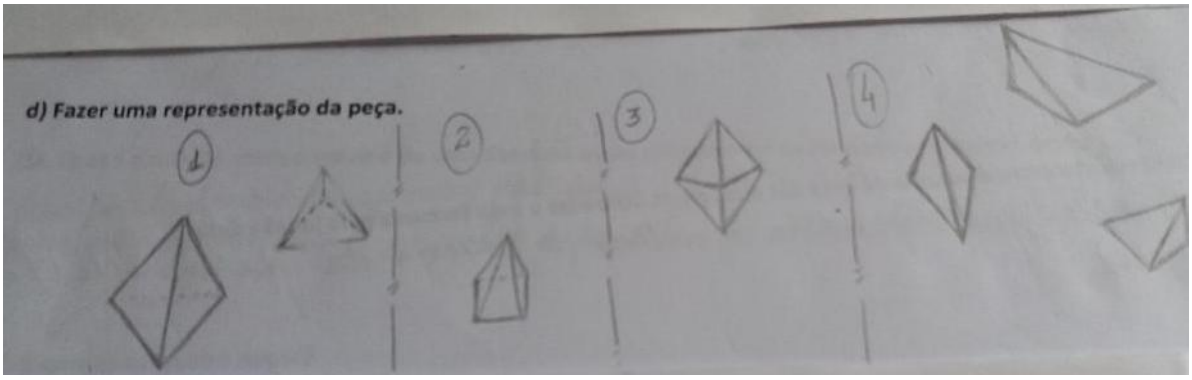
Para iniciar de forma metodologicamente consistente e amparando-se na teoria dos autores, a análise se organiza a partir da desmontagem do texto, examinando-o em seus detalhes, fragmentando-o. Para isso, o investigador deste estudo propôs a atividade intitulada "explorando um *kit* de objetos geométricos espaciais" (Figura 2) e, a partir dela, apontou os seguintes questionamentos: a) identificar cada forma geométrica espacial existente; b) separar e contar por forma e cor as peças; c) explorar cada forma geométrica espacial existente; d) fazer uma representação da peça; e) existe diferença(s) entre o objeto e sua representação? Se sim, qual (ou quais) é (ou são) ela(s)?

A desmontagem do texto ocorreu devido ao fato de o pesquisador (autor do artigo) já ter realizado pesquisa em oito instituições gaúchas que ofereciam formação de professores de Matemática e, em todas, havia ao menos um curso de Geometria Plana e um de Geometria Espacial. Em geral, essas disciplinas duravam um semestre letivo e eram essencialmente teóricas e, assim, foi necessário rever o conhecimento prévio dos praticantes (MORAES e GALIAZZI,2011). Nessa direção, nos referidos cursos e nos livros didáticos, imediatamente ao enunciar um princípio, um teorema ou uma relação, aparecem exemplos e aplicações diretas, sem interpretação visual dos verdadeiros significantes. A ATD, nesse sentido, segundo Moraes e Galiazzi (2011), focaliza tal aspecto como sendo um exercício de produzir e de expressar sentidos, o que é esperado nas representações que os indivíduos farão espontaneamente.

Os dados levantados nos registros mostraram não haver dificuldade na identificação das peças, uma vez que quase todos reconheceram os tetraedros, fazendo os registros verbais correspondentes a cada uma e, ainda, se eram regulares ou irregulares, dentre outas características. Todos identificaram a quantia de peças de cada tipo, como não poderia deixar de ser em virtude do nível de ensino em que se encontram (mestrado e doutorado). Isso mostra que os indivíduos já passaram pela fase indicada por Piaget e Inhelder (1993) quanto à percepção tátil, que deveria ser um dos níveis ou tipos de representação desencadeados já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em que "a linguagem se desenvolve como parte de um grande sistema de representação. É somente uma forma de representar o mundo"[3] (tradução livre), ao que se acrescenta, o mundo geométrico.

Quanto ao item b) separar e contar por forma e cor as peças; o mesmo não ofereceu dificuldade, ao passo que o item d) dá início ao processo representativo, como Piaget e Inhelder (1993) indicaram a respeito da intuição das formas no desenvolvimento espacial, o que é relevante para as representações e domínio entre a percepção e a imagem, início desta investigação, cujo desenvolvimento será acompanhado nas tarefas seguintes. Nesse sentido, discute-se, a seguir, a primeira atividade de identificação dos objetos do *Kit*.

Figura 3 – Representação das peças do *Kit*.



Fonte: registro encaminhado por F.

No item anterior, os alunos deveriam identificar as peças, sendo que o estudante F enumerou-as por grupos: (1) quatro faces em forma de triângulos equiláteros; (2) quatro faces triangulares e uma base quadrada; (3) oito faces triangulares, sem base ou base triangular ou união de duas pirâmides quadradas e (4) duas faces iguais (triângulos retângulos). A representação de cada um desses grupos é indicada na Figura 3. Segundo Moraes e Galiazzi (2011), um dos focos da compreensão possibilitada pela ATD é 'um processo auto-organizado' no qual "o ciclo de análise, ainda que composto de elementos racionalizados, em certa medida planejados, em seu todo pode ser

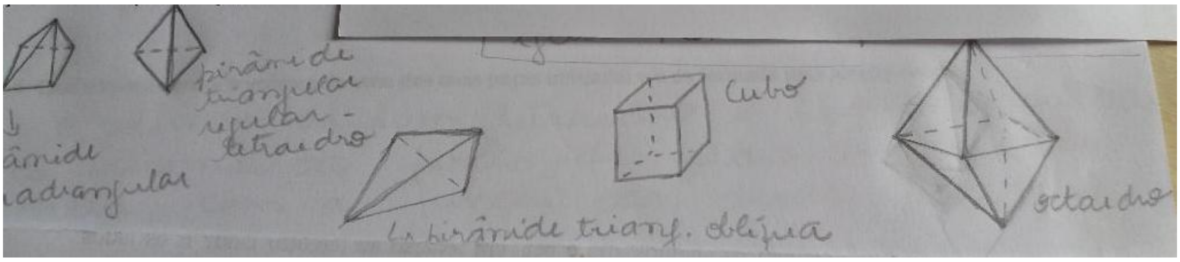
[3] El linguaje se desarrolla como parte de un gran sistema de representación. Es solamente una forma de representar el mundo. LABINOWICS, Ed. **Introducción a Piaget** – pensamento, aprendizaje, ensenanza. México: Pearson, 1987, p. 115.

compreendido como um processo auto-organizado do qual emergem novas compreensões” (p.12). Ao que tudo indica, a auto-organização nas representações de F faz sentido, de acordo com a ATD. No entanto, embora esse estudante tenha feito o registro de duas pirâmides de base quadrada, não o fez de forma correta, a menos que ele já tenha antecipado a reunião de dois tetraedros não regulares, formando uma pirâmide de base quadrada. No *ki*t, havia apenas uma, como pode ser observada na Figura 2.

Na racionalização da organização de seu texto, o indivíduo representa, de forma adequada, os tetraedros do primeiro grupo, indicando, inclusive, com linhas tracejadas, aquelas invisíveis ao observador, mostrando que se coloca de forma a observar duas faces do objeto. Já na segunda representação (grupo 2), o participante se posiciona frontalmente. No entanto, não é perceptível a representação do tetraedro não regular até esse momento. O texto sugere, visualmente, que o não regular vai surgir nas representações no grupo 4.

Na Figura 4, tem-se a representação das peças feitas pelo estudante G. Diferentemente do estudante anterior, G faz a representação e identifica o ente geométrico. Percebe-se, por exemplo, que ele utiliza pirâmide e não tetraedro em suas denominações.

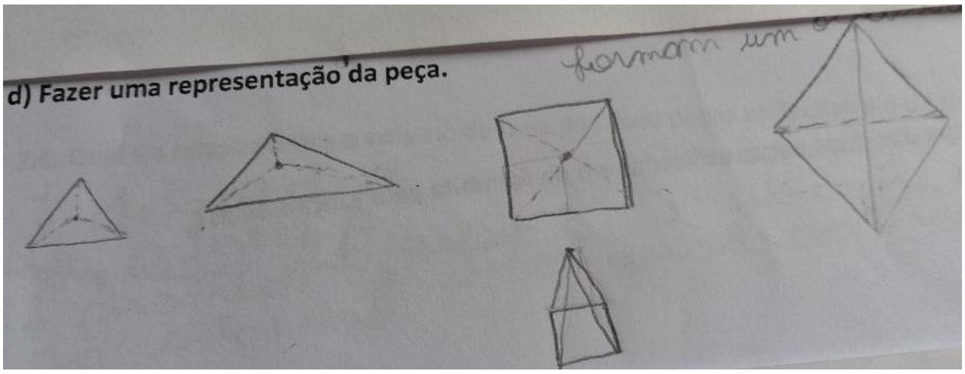
Figura 4 – Representação das peças do *Kit*.



Fonte: dados dos registros feitos por D.

A Figura 5 ilustra a representação feita por G, observando-se que distinguiu bem os dois tipos de tetraedros, colocando arestas alongadas no não regular, diferentemente do que representou no regular.

Figura 5 – Representação inicial de estudantes



Fonte: registro feito por G.

Nessa primeira atividade, os indivíduos foram solicitados a responder se haveria diferença(s) entre o objeto e sua representação e, em caso afirmativo, qual (ou quais) é (ou são) ela(s)?

No que segue, se apresenta as justificativas de D, F e G.

D: *Sim. A representação de cada objeto depende do ponto de observação que constrói a representação. Pode-se criar diversas representações diferentes de um mesmo objeto.*

F: *Sim, nas representações não é possível visualizar algumas características do sólido, por exemplo, na figura 4 citada acima, a forma geométrica apresenta uma inclinação, suas faces têm medidas distintas, ou seja, pela representação não é possível perceber tais diferenças com clareza*.

Note que, ao citar a figura 4, o participante quer se referir ao último grupo caracterizado pelo estudante na Figura 3 deste texto.

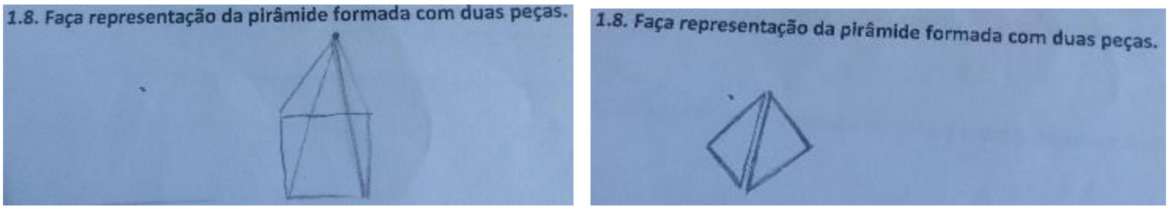
G: *Sim, existe diferenças entre a representação e o objeto, pois a representação depende da perspectiva de quem está vendo o desenho. Não é possível manusear a representação como se faz com o objeto*.

Os textos desses alunos indicam a 'reescrita de cada unidade de modo que assuma um significado, o mais completo possível em si mesmo'. Isso ilustra o momento da unitarização de Moraes e Galiazzi (2011), fazendo sentido na escrita desses elementos, embora sem maior objetividade, quando deveriam dizer que a representação não é o objeto, e sim uma simbologia do mesmo. Tal aspecto leva à necessidade de atribuir sentido ao símbolo, na perspectiva de Arcavi (2005).

No quebra-cabeças n. 1, o investigador solicitou que fosse montada uma pirâmide de base quadrada regular a partir de dois tetraedros de livre escolha. Na ficha de registro foi pedido: a) especificar quais as peças que você usou e o porquê; b) existe alguma peça no *kit* equivalente a essa? Se sim, qual? c) como são as faces da peça em forma de tetraedro? d) e quanto às arestas, o que você pode afirmar? e) e a da pirâmide? f) qual a relação entre o volume de cada uma das duas peças utilizadas e o da formada pela junção? g) como você calcularia a área lateral do tetraedro? h) faça a representação da pirâmide formada por duas peças.

Não houve dificuldade nesses itens e a relação entre o volume da pirâmide como o dobro do volume do tetraedro não regular foi imediata. Nas representações, objeto deste artigo, verifica-se, na Figura 6 (esquerda), o registro figural feito pelo participante G. Ele representa a pirâmide de forma global e não como composição de dois tetraedros, enquanto na da direita a representação de D é feita por dois triângulos separados (os dois tetraedros), sem, contudo, dar a noção da representação espacial. A representação feita por D indica fidelidade na correspondência objeto-representação e conduz o leitor, por si só, a compreendê-la não como peça única (G), e sim como uma composição (D).

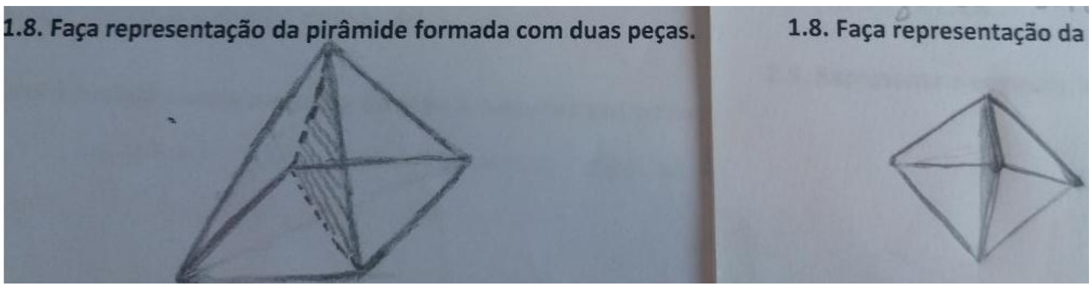
Figura 6. Representação da pirâmide formada por duas peças.



Fonte: registro de G e D.

Na Figura 7, verifica-se que F (a da esquerda) e D (a da direita) buscam a representação espacial. Enquanto a primeira identifica uma melhor posição do observador, inclusive pontilhando algumas linhas não visíveis, a da direita não o faz, deixando de oferecer uma melhor identificação do objeto espacial, ainda que ambas indiquem com sombreado a face comum dos dois tetraedros acoplados. Inclusive, a da direita não mostra fidelidade na representação da base quadrada do objeto constituído. Pode-se perceber o dito por Arcavi (2005, s.n.) de que “os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos e desenvolver um sentido intuitivo dessas diferenças”. No que a ATD aborda sobre o ‘corpus’, os autores indicam que “[...] geralmente, nos ocupamos de textos no sentido de produções escritas, o termo deve ser entendido num sentido mais amplo, incluindo imagens e outras expressões linguísticas” (MORAES e GALIAZZI, 2011, p. 16), conectando ao indicado por Arcavi (2005).

Figura 7. Ainda uma representação da pirâmide formada por dois tetraedros não regulares.



Fonte: registros de F e D.

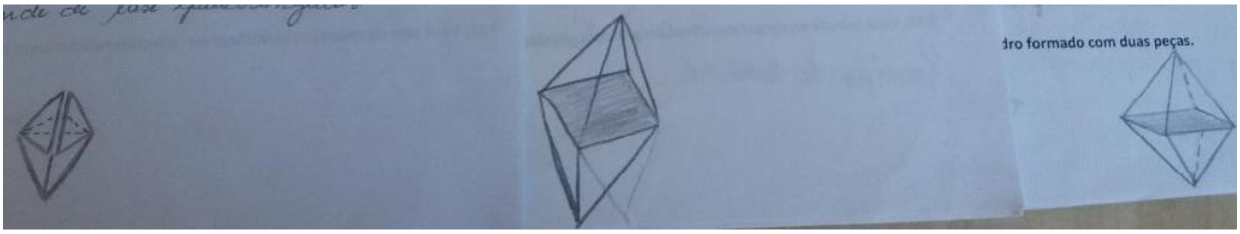
Um segundo quebra-cabeças indicava a utilização de peças a livre escolha para formar um novo octaedro regular e indicar quais delas cada um utilizou. Em seguida, se questionou se haveria peças equivalentes, no *kit*[4], às utilizadas e que permitiriam a obtenção do mesmo sólido. As respostas variaram entre duas pirâmides de base quadrada, quatro tetraedros irregulares, octaedro, dois tetraedros irregulares e uma pirâmide de base quadrada. Os argumentos foram variados. Em função da primeira atividade, os estudantes argumentaram que poderiam unir quatro tetraedros irregulares; duas pirâmides unidas pela base quadrada ou uma pirâmide de base quadrada com dois tetraedros irregulares, formando uma segunda pirâmide. Com isso, a relação entre o

[4] Vale ressaltar que havia na mesa do investigador uma caixa ampla com muitas peças, as quais os alunos poderiam vasculhar para obter equivalentes, pois, no *Kit* inicial, por exemplo, havia uma única pirâmide.

volume do octaedro como sendo o quádruplo do volume do tetraedro irregular foi anunciada por todos.

Cinco estudantes representaram o octaedro pela união de duas pirâmides de base quadrada, em geral sombreando tal base; um não fez representação e um terceiro a fez como a união das três peças. Percebe-se, pois, a unitarização da ATD, de Moraes e Galiazzi (2011), quanto ao estabelecimento de relações entre os elementos unitários.

Figura 8. Representação do octaedro por pirâmides de base quadrada e por tetraedros irregulares.



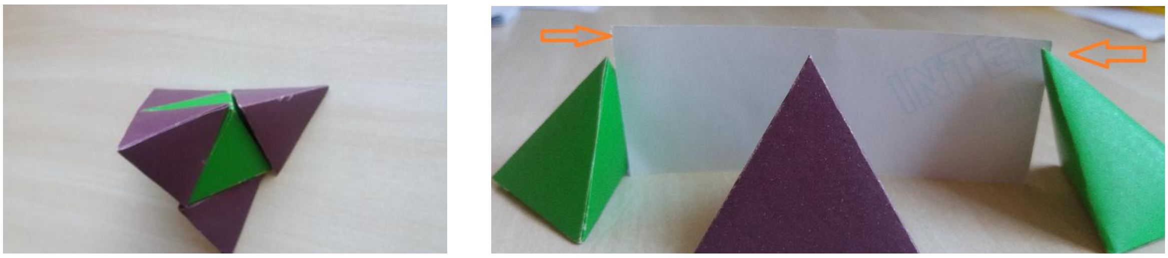
Fonte: registros dos estudantes F, B e D.

A representação da esquerda, feita por F, fica perfeitamente caracterizada como constituída de três peças, sendo uma pirâmide de base quadrada com vértice na parte inferior e dois tetraedros irregulares na parte superior, formando uma segunda pirâmide sobreposta à primeira pela base quadrada. As linhas tracejadas permitem a visualização espacial de forma adequada. Na figura central, feita por B, a representação é por duas pirâmides de base quadrada, a qual está sombreada. Observa-se a não existência de linhas ocultas tracejadas, o que permitiria uma melhor visualização do objeto espacial e a posição do observador. A representação da direita é similar à central, porém ilustra as linhas ocultas por outras tracejadas (estudante D). Observou-se que, em todas as representações feitas, o octaedro se encontra com um vértice na parte superior e outro na inferior, parecendo indicar a melhor visualização da base quadrada das pirâmides constituintes, ou que isso segue uma forma mais ou menos usual em representações geométricas, como, por exemplo, colocar o quadrado com lados horizontais e verticais ou o losango com um vértice superior e o oposto inferior.

O terceiro quebra-cabeças indicava a construção de um tetraedro regular usando um octaedro e outras quatro peças diferentes, todas da mesma cor. Os estudantes eram livres para escolher as peças, mas deveriam indicar quais escolheriam e o porquê de tal escolha. Além disso, deveriam, posteriormente, indicar se haveria alguma peça equivalente à formada (poderia ser na caixa sobre a mesa do professor). A atividade solicitava, também, se poderia ser feita a substituição do octaedro por outras peças e, nesse caso, qual a relação entre o volume de cada uma e a do octaedro.

Nessa sequência de substituições, buscou-se a construção do mesmo tetraedro com sete peças, o que, inevitavelmente, levaria à utilização da relação entre os volumes dos tetraedros regulares e não regulares, ou seja, a chegada intuitiva, perceptiva e visual ao Princípio de Cavalieri, bem como se os estudantes o identificariam e o enunciariam. Na Figura 9, à esquerda, se encontra o tetraedro com cinco peças, e à direita, a imagem indicando a posição, segundo a qual se visualizava o tetraedro da direita estando à mesma altura do central, enquanto o da esquerda, em uma altura menor, relativamente ao plano sobre o qual se apoiavam. Além disso, deveria ser observada a posição das bases dos dois tetraedros não regulares. No primeiro caso, a base apoiada era constituída de uma região triangular não regular, enquanto o da direita por regular, idêntica à do tetraedro regular central.

Figura 9. Tetraedro maior.



Fonte: dados da pesquisa.

As justificativas dos estudantes são as que seguem:

G: 1 *octaedro + 4 tetraedros. São as únicas peças que podem formar o objeto pedido*[5].

Percebe-se, nessa justificativa, que o estudante G não identificou qual tetraedro utilizou, se o regular ou o irregular.

A: *4 tetraedros regulares e 1 octaedro. Encaixe perfeito p/ o propósito de construir um tetraedro regular*.

Não fica explícito o que o estudante A caracterizou como perfeito. Na sequência, ele afirmou existir uma peça: *aquela equivalente em proporção aos tetraedros regulares*. Não diz qual, mas parece estar intuindo a equivalência de volumes ao afirmar a equivalência.

C: *um octaedro e quatro tetraedros regulares, porque as faces laterais do octaedro e dos tetraedros são iguais*.

No que diz respeito a indicar qual era a peça equivalente no *kit*, C afirma: *Sim, o tetraedro regular*.

Essa peça, no entanto, não constava no *kit* fornecido. Posteriormente, C comparou com a caixa que o professor disponibilizou sobre sua mesa com mais objetos do que o constante no *kit* individual fornecido a cada estudante.

[5]. A transcrição das falas dos participantes foi literal.

F: *Para fazer um tetraedro foi utilizado 1 octaedro e 4 tetraedros regulares da mesma cor. Porque as faces do octaedro são triângulos equiláteros e dos tetraedros regulares também e com as mesmas medidas.*

Percebe-se que o estudante analisou com detalhes as peças quando da distribuição inicial do *Kit* e elaborou relações entre as medidas das mesmas. Assim, a captura do novo emergente se apresenta para esse estudante, uma vez que, tendo havido a desconstrução inicial, ele compreendeu o processo de forma renovada num processo auto-organizado da ATD. Ao que tudo indica, os indivíduos parecem estar reelaborando o 'corpus' de seu texto por meio dos três momentos da unitarização preconizada por Moraes e Galiazzi (2011): "fragmentação dos textos e codificação de cada unidade; reescrita de cada unidade de modo que assuma um significado, o mais completo possível em si mesma; atribuição de um nome ou título para cada unidade assim produzida" (p. 19). Isso ocorreu porque passaram a compreender a necessidade de registros figurais (representações) que permitem a comunicação, o que é desejável ao professor para um ensino que propicie uma aprendizagem significativa em geometria. Os demais participantes não justificaram as escolhas.

Na atividade, os estudantes deveriam buscar substituir o tetraedro anterior por um formado com cinco peças e, a seguir, com sete peças. Nessa elaboração, se investigava potencialidades de relações entre as peças para chegar à relação entre os volumes. Ao finalizar a atividade, era solicitado: você saberia enunciar/identificar um princípio relacionando os volumes de sólidos? Se sim, qual seria ele?

B responde que os volumes são equivalentes e indica o nome do Princípio de Cavalieri, mas não o formaliza.

D afirma: *os volumes são iguais e Volume do sólido = somatório dos volumes das peças que compõem esse sólido*.

D não chega, portanto, a comparar os volumes dos dois tipos de tetraedros pequenos para identificar com o Princípio de Cavalieri. A, C e E relacionam os volumes dos dois e enunciam o Princípio, denominando-o. F e G não fornecem a relação e nem enunciam o princípio.

A partir dessas conclusões, as próximas atividades conduziram a relações entre volumes de pirâmides com o volume do cubo, o que não será objeto de análise neste artigo pela limitação de espaço, como já indicado. A Figura 10 ilustra como é possível colocar todas as peças do *kit* no cubo, como foi inicialmente sugerido aos participantes. Para a reunião das peças, havia disponibilidade de fitas dupla face e a planificação do cubo em papel transparente.

Figura 10. O *kit* com todas as peças formando o cubo.

Fonte: do autor

Considerações finais

Neste artigo, apresentou-se resultados parciais de uma pesquisa realizada com estudantes de um Programa de Pós-Graduação em Ensino em Ciências e Matemática, em uma disciplina ofertada pelo autor, que visava metodologias de ensino em geometria. A sequência de atividades, envolvendo quebra cabeças geométricos espaciais, teve como objetivo principal desenvolver habilidades de representação espacial e, por intermédio da identificação/reconhecimento do Princípio de Cavalieri, obter relações entre volumes, inclusive com obtenção de fórmulas como a do tetraedro ser igual a um terço do volume do cubo no qual está inserido.

Como recurso para responder como os estudantes desenvolviam tais habilidades, utilizou-se quebra-cabeças espaciais, a partir de um *kit* de objetos fornecido a cada estudante, conforme modelo sugerido por Kaleff (1998). As experiências da autora mostram, a exemplo do que ocorreu nesta pesquisa, que professores, quando colocados à prova ao já relativamente conhecido, apresentam dificuldades na compreensão de determinados conceitos e relações matemáticas. Além disso, reforça a necessidade de utilização de metodologias alternativas para o ensino de geometria na formação inicial e continuada do professor de Matemática. Isso fica reiterado na presente pesquisa, de acordo com a ATD, que permitiu analisar os discursos dos indivíduos.

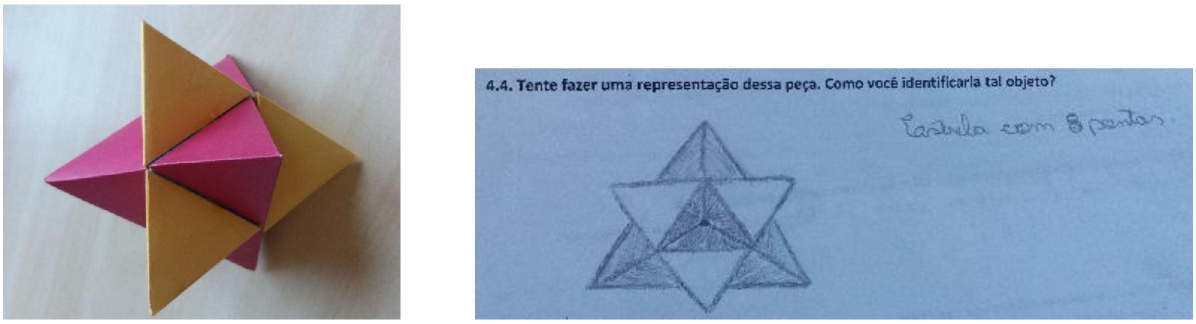
Além dos indicativos de Kaleff (1998), a pesquisa envolvendo recursos visuais com ‘dobragem de papel’, como sugerido por Villiers e Schumann (s.d), no caso deste estudo, aliados com quebra-cabeças desafiadores, são importantes para atores em curso de ação continuada de um Programa de Pós-Graduação, a fim de poder proporcionar novas atitudes de ensino na escola básica. Também, a presente pesquisa reforça os indicativos de Vieira e Allevato (2015, 2018), bem como de Oliveira e Leivas (2017), sobre o uso de recursos materiais e tendências metodológicas para ensinar geometria.

Concluiu-se, da investigação, que estudantes que já haviam estudado Geometria Espacial e outros que já exercem o magistério, apresentam limitações no que diz respeito à desconstrução de um conteúdo. A partir disso, a atividade implementada possibilitou a elaboração da unitarização do seu texto, de modo a promover a comunicação com seus pares e melhorar a compreensão daquilo que tiveram em sua formação inicial. O exemplo comprobatório foi a dificuldade em visualizarem o Princípio de Cavalieri a partir de tetraedros regulares e não regulares, em que os não regulares possuíam uma face formada por uma região triangular equilátera congruente à do regular, além de possuírem a mesma altura quando posicionados convenientemente.

No entanto, cabe ressaltar que, o processo que iniciou por representações simples e progrediu até outras mais complexas desenvolveu nos indivíduos segurança até chegarem à representação de uma estrela de oito pontas, a qual, ao ser completada com doze outros tetraedros pequenos não regulares, forneceu o volume do cubo. A partir de então, puderam concluir que cada tetraedro pequeno possui o volume 1/24 do volume do cubo e que o tetraedro maior corresponde a 1/3 do volume do cubo. Dessa forma, num pequeno espaço de tempo, foi possível retomar muitas ideias e conteúdos de Geometria Espacial que, às vezes, não chegam a ser desenvolvidos na escola básica, com a alegação de falta de tempo. Nesse sentido, acreditamos que o problema de pesquisa: "como estudantes de uma Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática podem desenvolver habilidades de representação espacial?" foi respondido na medida em que os participantes puderam manusear recursos materiais concretos, observar as relações entre as peças de quebra-cabeças, manipular os objetos e, por fim empregar diversas representações de objetos espaciais.

Para finalizar, ilustra-se, na Figura 11, a estrela de oito pontas que, quando completada com 12 tetraedros não regulares, fornece o cubo. A representação feita pela estudante F cumpre, por si só, o objetivo da pesquisa focalizada neste artigo. Outros participantes também chegaram, ao final, a representações similares, nada elementares, o que mostra ser possível desenvolver a habilidade de representação em geometria de forma gradual.

Figura 11. Estrela de oito pontas e representação da estudante F.



Fonte: dados da pesquisa

Referências

ARCAVI, A. **Symbol sense**: informal sense-making in formal mathematics. Department of Science Teaching. Weizmann Institute of Science. Rehovor, Israel, 2005.

BOTAS, D.; MOREIRA, D. A utilização dos materiais didáticos nas aulas de Matemática – um estudo no 1º. Ciclo. **Revista Portuguesa de Educação**, 26(1), 2013, pp. 253-286.

KALEFF, A.M.M.R. **Vendo e entendendo poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 1998.

MOISE, E.E.; DOWNS, F.L. Jr. **Geometria Moderna**, parte II. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1967.

MORAES, R.; GALIAZZI, M.C. **Análise Textual Discursiva**. 2 ed. Ijui: Editora Unijuí, 2011.

MOREIRA, M.A. Metodologias de Pesquisa em Ensino. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

OLIVEIRA, M. T.; LEIVAS, J.C.P. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. **Ciência e Natura** v.39 n.1, 2017, p. 108 – 117.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. A produção de conhecimento sobre sólidos geométricos à luz do modelo Van Hiele. **REnCiMa**, Edição Especial: IV Encontro de Produção Discente, v. 6, n.1, p. 43-53, 2015.

VIEIRA, G.; ALLEVATO, N. S. G. Tarefas exploratório-investigativas e a construção de conhecimentos sobre figuras geométricas espaciais. **REnCiMa**, v. 9, n.6, p. 62, 2018.

VILLIERS, M. de; SCHULMANN, H. **A surprising 3D result involving a hexagon**. Germany: University of Education Weingarten. Capturado em 28fev.2018 da Home page: http://dynamicmathematicslearning.com/homepage4.html.