INVESTIGAÇÂO SOBRE O DESENVOLVIMENTO DO PROCESSO DEDUTIVO NOS CURSOS DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INVESTIGATION ABOUT THE DELOPMENT OF THE DEDUCTIVE PROCESS IN THE FORMATION OF MATHEMATICS TEACHERS

Lilian Nasser

Projeto Fundão e PEMAT – IM/UFRJ, lnasser.mat@gmail.com

João Caldato

PEMAT – IM/UFRJ, joao.caldato.correia@gmail.com

Resumo

Este artigo relata parte de uma pesquisa que visa investigar se os cursos de Licenciatura em Matemática preparam os futuros professores para explorar, em suas aulas, atividades que promovam o desenvolvimento do pensamento dedutivo. O trabalho foi motivado pela observação de que, em geral, os professores de Matemática não se preocupam em desenvolver a habilidade de argumentação de seus alunos e não valorizam as justificativas informais apresentadas. Esse comportamento pode ser justificado pela formação prévia desses professores. Se o licenciando não teve oportunidade de vivenciar atividades que demandam argumentação ou provas na Escola Básica, é necessário que ele tenha essa experiência durante o curso de formação de professores. No entanto, os resultados de questões discursivas do ENADE que requerem raciocínio dedutivo evidenciam um desempenho preocupante dos licenciandos nesse quesito, pois as médias das notas são, em geral, muito baixas, sendo que a maioria das respostas ficou em branco. Em algumas questões, as respostas apresentadas se baseavam em argumento de natureza empírica, apenas experimentando a validade da afirmativa para poucos exemplos. Os relatórios indicam que os estudantes não encontram nos cursos de graduação em Matemática oportunidades para superarem tais dificuldades.

Palavras-chave: processo dedutivo; formação de futuros professores; ENADE.

Abstract

This article reports part of a research with the purpose to investigate if the courses of formation of Mathematics teachers prepare the future teachers to explore, in their lessons, activities that promote the development of deductive thinking. The study was motivated by the observation that Mathematics teachers do not worry in developing the ability of argumentation of their pupils and do not value the presented informal justifications. This behavior can be justified by the previous formation of these teachers. Since the undergraduate students did not have the chance to face tasks that demand argumentation or proof in at Basic School, they must have this experience during the course of formation of teachers. However, the results of discursive questions of the ENADE which require deductive reasoning give evidence of a preoccupying performance of future teachers in this issue, since the averages had been very low and the majority of the answers was blank. On some questions, the presented answers were based on arguments of empirical nature, only testing the validity of the affirmation for few examples. The ENADE reports indicate that the students do not find in the undergraduate courses in Mathematics chances to surpass such difficulties.

Keywords: deductive process; formation of future teachers; ENADE.

Introdução

A pesquisa sobre argumentação e provas no ensino de Matemática cresceu muito nas últimas décadas. Percebendo a multiplicidade de abordagens sobre o tema, Reid e Knipping (2010) apresentam um levantamento dos autores e discutem as principais linhas de pesquisa e trabalhos envolvendo as demonstrações em Matemática e suas diversas interpretações. Na introdução do seu livro, eles afirmam que

> a pesquisa sobre o ensino e aprendizagem de prova e demonstração se expandiu nas últimas décadas. Isso reflete o crescimento da educação matemática em geral, mas também uma ênfase crescente em prova na educação matemática. [...]Tornou-se mais e mais difícil obter um panorama do campo e identificar os conceitos chave usados na pesquisa em provas e demonstrações. (REID; KNIPPING, 2010, p.xiii, tradução nossa).

Desde o primeiro Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), realizado em 2000, já era apontada uma interface entre a Educação Matemática no Ensino Superior e diversas linhas de pesquisa, incluindo a de “Argumentação e Provas”. Por outro lado, professores dos cursos de Licenciatura em Matemática têm observado a ineficiência dos estudantes em formação inicial na habilidade de argumentar e produzir provas para afirmativas matemáticas. Isso se justifica pelo fato de que na Educação Básica os alunos não têm oportunidade de vivenciar experiências com atividades argumentativas e/ou dedutivas.

Diante desse quadro, observa-se um círculo vicioso: os licenciandos chegam ao Ensino Superior sem dominar os processos dedutivos. Se não tiverem oportunidade de vivenciar atividades que promovam o desenvolvimento da habilidade em argumentação e provas durante o curso, depois de formados, muito possivelmente, não incluirão em suas aulas atividades argumentativas e/ou dedutivas que, em geral, não aparecem nos livros textos, nem são cobradas nas avaliações oficiais (Prova Brasil, ENEM).

O objetivo deste trabalho é investigar se os cursos de Licenciatura em Matemática têm fomentado o desenvolvimento do processo dedutivo dos futuros professores. Para isso, serão analisadas questões do Exame Nacional do Ensino Superior (ENADE) propostas aos estudantes dos cursos de Licenciatura em Matemática nas quatro últimas aplicações, em 2008, 2011, 2014 e 2017, à luz dos construtos teóricos de Balacheff (1988) e de Harel e Sowder (1998).

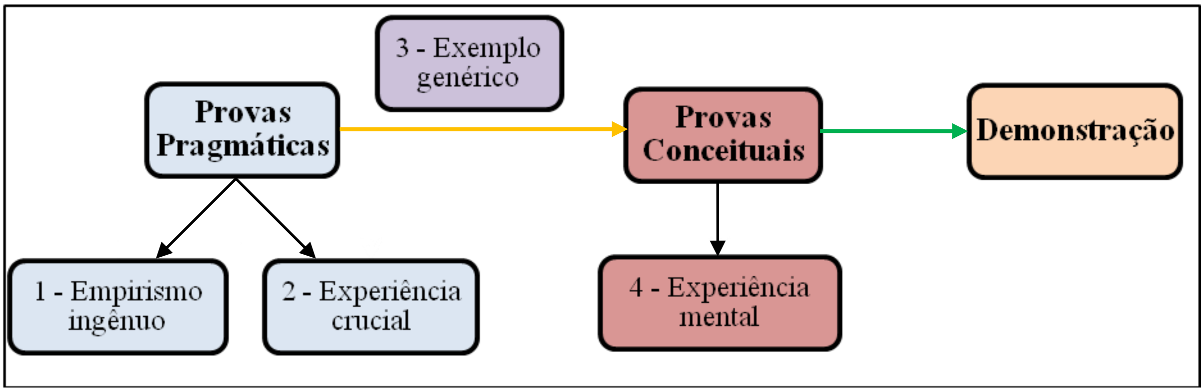
Referencial Teórico

O precursor e autor mais citado quando se aborda o tema de argumentação, prova e demonstração no ensino de Matemática é Nicholas Balacheff, que apresentou uma tipologia de provas, indicando tipos hierárquicos de justificativas produzidas pelos alunos ao longo da sua escolaridade. Balacheff (1988, p. 217) classificou as provas em pragmáticas ou conceituais. Para o autor, prova pragmática é aquela que recorre a testes de validade, busca de regularidades, exemplos ou desenhos para justificar um determinado resultado, chamados pelo autor de "recursos de ação", enquanto a prova conceitual não recorre a tais recursos no momento de justificar as propriedades envolvidas e as possíveis relações entre elas, mas sim ao processo dedutivo. Segundo ele, há vários tipos de provas pragmáticas, que devem ser valorizadas na Escola Básica e que contribuem para o domínio das provas conceituais. O autor destaca quatro modalidades de prova: *empirismo ingênuo, experimento crucial, exemplo genérico* e *experimento mental*.

O empirismo ingênuo é baseado na observação, em que o aluno assume como verdade a conjectura de um enunciado através da verificação de poucos e simples casos, sem questionamento algum quanto às suas peculiaridades. Já na experiência crucial se utiliza um experimento particular para investigar a veracidade de uma proposição, acreditando que se a conjectura é verificada para o experimento escolhido, então ela é sempre verdadeira. No exemplo genérico, como a nomenclatura sugere, elege-se um exemplo como representante da classe de objetos para explicitar as razões que validam a propriedade com o intuito de deduzir as características que representam essa classe. Por fim, a experiência mental se baseia no raciocínio lógico dedutivo para garantir a validade de uma propriedade de forma genérica (para toda a classe de objetos) e não por meio de exemplos ou de um representante particular.

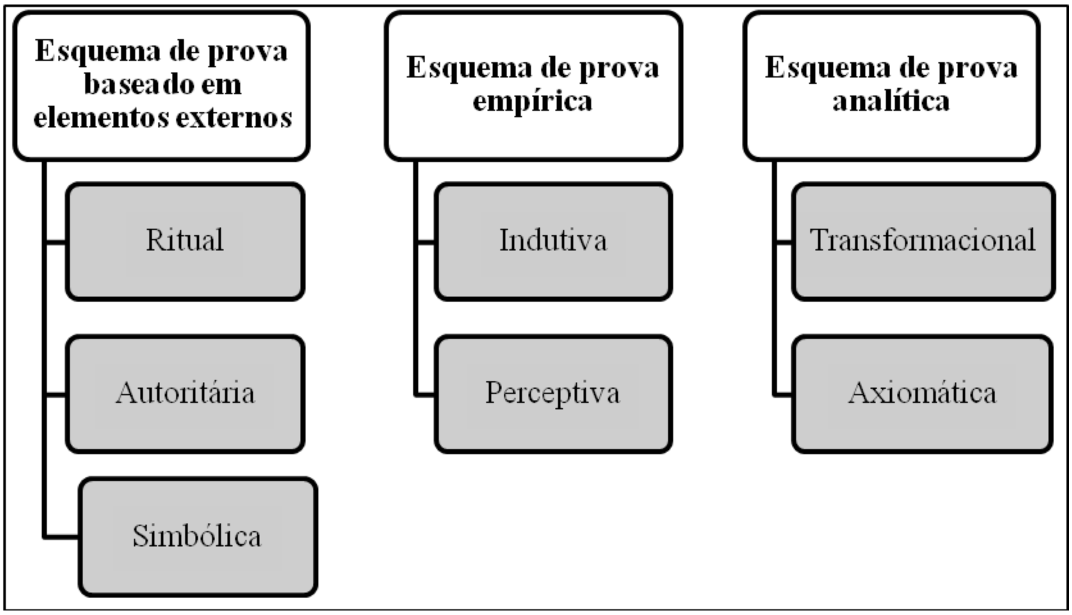
É importante destacar que estas quatro modalidades se originam dos movimentos existentes entre os tipos de prova: o empirismo ingênuo e o experimento crucial são tipos de prova pragmática, e o experimento mental reside no campo da prova conceitual. Já o exemplo genérico constitui um estágio de transição entre os dois tipos. Um esquema ilustrativo (figura 1) disso foi apresentado por Caldato (2018) em sua dissertação de mestrado.

Figura 1 – Classificação dos tipos de prova de Balacheff.



Fonte: CALDATO (2018, p. 59).

Figura 2 – Classificação dos esquemas de prova de Harel e Sowder.



Fonte: CALDATO (2018, p. 61).

De acordo com a figura 1, é possível verificar que os tipos de provas remetem a uma transição evolutiva da noção de demonstração (do empirismo ingênuo à experiência mental). Logo, para que um aluno possa atingir o nível mais elevado, isto é, da experiência mental, e seja capaz de não somente compreender o significado de uma demonstração, mas também de demonstrar, é necessário que ele vivencie todos os níveis anteriores. Por isso, é importante investigar o desenvolvimento do raciocínio dedutivo nos cursos de Licenciatura em Matemática, a fim de refletir sobre o papel do futuro professor em criar condições favoráveis para que ocorra esta transição entre os diferentes níveis.

Harel e Sowder (1998), a partir de um estudo que investigava como os estudantes justificavam a validade de uma afirmação matemática, estabeleceram a terminologia esquemas de prova, que resumidamente pode ser definido como argumentos convincentes, classificados em três categorias: *esquemas externos, empíricos e analíticos de prova*.

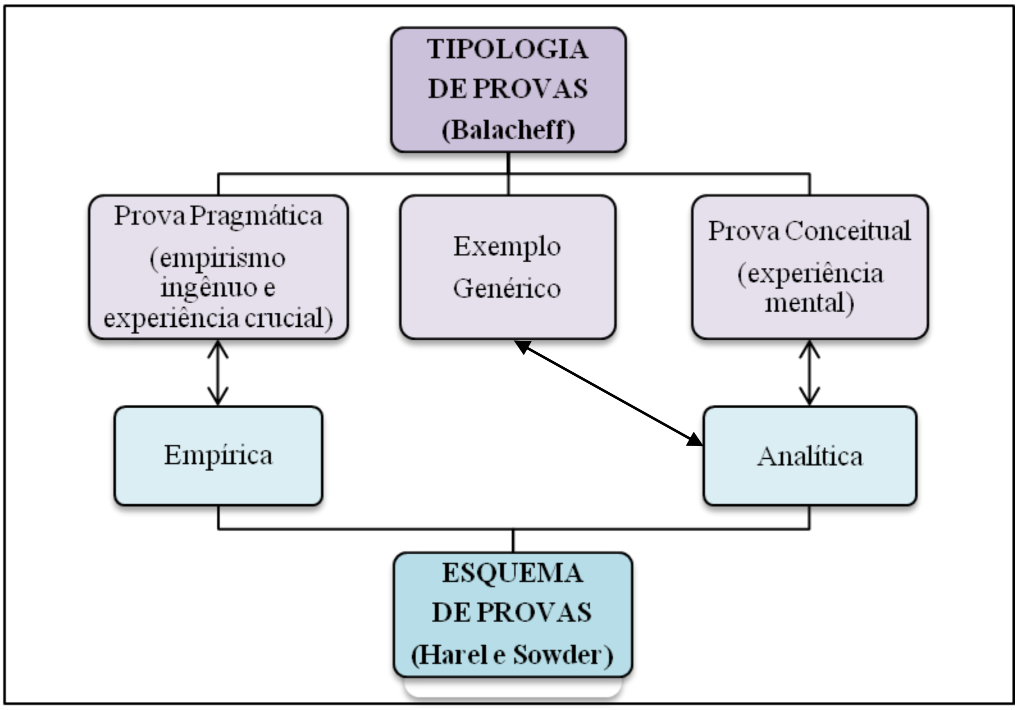
Os esquemas baseados em fatores externos, como a nomenclatura sugere, são elementos externos ao problema que influenciam na convicção do estudante sobre uma determinada sentença matemática. Esses fatores estão relacionados, por exemplo, ao modo como o argumento é apresentado. Em virtude disso, Harel e Sowder propõem a subdivisão em esquemas de prova ritual, autoritário ou simbólico. Já o esquema empírico se refere aos casos em que a validade de uma sentença é influenciada por evidências numéricas a partir da verificação de um ou mais exemplos ou através da percepção. Este esquema pode ser subdivido em indutivos ou perceptivos. Por fim, o esquema analítico, em síntese, é caracterizado pelo uso do raciocínio dedutivo. Entretanto, os autores observam que isso vai além do que usualmente é chamado de “método de demonstração matemática”, isto é, um processo que envolve uma sequência de enunciados, os quais são deduzidos por meio de certas regras lógicas, a partir de um conjunto de afirmações que são aceitas sem provas (também conhecidos como axiomas). Esta categoria compreende as subdivisões em esquemas transformacionais ou axiomáticos. A figura 2 ilustra cada uma das três categorias e suas respectivas subdivisões.

Além disso, Harel e Sowder (1998) observam que é necessário um trabalho cuidadoso com os alunos para desenvolver o processo dedutivo, afirmando que

> a maior razão para as sérias dificuldades dos alunos na compreensão, apreciação e produção de provas é que nós, professores, acreditamos que sabemos o que constitui evidência aos olhos deles. Em vez de gradualmente refinar as concepções dos estudantes acerca do que constitui evidência e justificativa em matemática, nós impomos a eles métodos e regras de implicação que, em muitos casos, são estranhos para convencê-los. (p. 237, tradução nossa).

A figura 3 mostra a correspondência entre ambos os modelos teóricos, estabelecida por Caldato (2018).

Figura 3 – Articulação entre a tipologia e os esquemas de provas.



Fonte: CALDATO (2018, p. 66).

O autor observa que essa correspondência não é completa, pois no modelo teórico de Balacheff não existe nenhum tipo de prova similar ao esquema de prova baseado em elementos externos de Harel e Sowder. Além disso, observa também que, enquanto "a tipologia apresenta níveis de prova que reporta a uma transição evolutiva da noção de demonstração, os esquemas de provas se organizam em (sub)categorias que remetem a uma perspectiva subjetiva de validade, que pode variar de acordo com o indivíduo" (CALDATO, 2018, p. 67).

Estes modelos teóricos são utilizados com frequência nas pesquisas envolvendo o desenvolvimento do processo dedutivo por parte dos estudantes dos diversos níveis de ensino, inclusive de licenciandos.

Pesquisas Correlatas

Nasser (2000) relatou no I SIPEM a preocupação com o alto número de respostas em branco a questões discursivas do antigo “Provão” aplicado aos cursos de graduação em Matemática, que foi o precursor do ENADE. Desenvolveu, então, um estudo com o objetivo de comparar o desempenho de 37 calouros do curso de Licenciatura em Matemática, com 18 professores de Matemática da Escola Básica, cursando Especialização em Educação Matemática na mesma instituição. Os resultados mostraram que o desempenho das duas amostras foi muito semelhante, indicando que muitos dos sujeitos “não conseguem nem diferenciar a hipótese da tese e que aparentemente ao longo dos anos de estudo na universidade esse quadro não é melhorado, e pode até piorar, se os professores não usarem raciocínio lógico dedutivo no exercício do magistério.” (NASSER, 2000, p. 142). Além desse trabalho, encontramos nos anais do SIPEM apenas mais um envolvendo argumentação e provas. Almouloud e Fusco (2006) discutiram as dificuldades de professores da Educação Básica a respeito do conceito de demonstração em Matemática, num trabalho apresentado no GT de Formação de Professores.

A necessidade de aprimorar a habilidade do processo dedutivo em licenciandos tem chamado a atenção de pesquisadores, gerando diversas dissertações e teses, como as de Pietropaolo (2005), Ordem (2015), Mateus (2015) e Ferreira (2016). Outras pesquisas focam na produção de justificativas apresentadas por alunos na Escola Básica, como relatado em Aguilar Jr. (2012) e em Caldato, Utsumi e Nasser (2017). Na Grã-Bretanha, Celia Hoyles (1997) e seu grupo desenvolveram uma ampla pesquisa com professores, analisando sua reação a diferentes tipos de provas produzidos por alunos. Esse trabalho rendeu várias publicações e serviu de modelo para pesquisas em diversos países. No Brasil, destacam-se o projeto AprovaME (Argumentação e Prova na Matemática Escolar), do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da PUC-SP, coordenado por Lulu Healy e a dissertação de Aguilar Jr. (2012), apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Matemática (PEMAT/UFRJ).

Essa preocupação não é característica da área de Matemática. Pezarini e Maciel (2019) consideram que a exploração da argumentação no ensino das subáreas das Ciências da Natureza é uma emergência. Os autores desenvolveram um estudo classificatório das argumentações apresentadas por alunos do Ensino Médio, concluindo que

> é por meio da argumentação no ensino e na aprendizagem científica que podemos conduzir os alunos a uma estratégia de empoderamento do letramento científico [...] mas ainda há muito a ser pesquisado e analisado com vistas a práticas de formação científica. Enfim, o discurso argumentativo nas aulas de ciências e no processo do ensino científico é uma das possibilidades do ensino de ciências. (PEZARINI; MACIEL, 2019, p. 46).

Estes trabalhos de pesquisa apontam a necessidade de preparar os futuros professores para desenvolver, em suas turmas, atividades argumentativas e dedutivas, aprimorando o desempenho dos alunos no processo dedutivo.

Metodologia: análise dos resultados de questões do ENADE

Para investigar o domínio dos licenciandos em atividades envolvendo argumentação e provas, a metodologia adotada neste artigo será a análise dos resultados de questões do Exame Nacional do Ensino Superior (ENADE). Este exame é aplicado pelo Ministério da Educação (MEC) a uma determinada amostra de estudantes de diferentes cursos do Ensino Superior, a fim de avaliar e de acompanhar o processo de aprendizagem dos discentes.

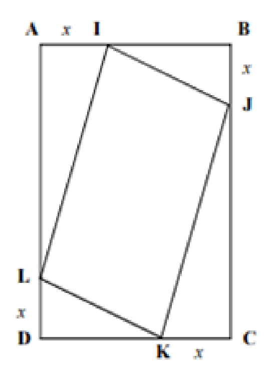
Em particular, no curso de Licenciatura, a proposta inicial do ENADE era de aplicar os mesmos testes a ingressantes e concluintes, com o objetivo de investigar o aprimoramento no desempenho ao longo da graduação. Essa comparação é possível de acordo com a Teoria da Resposta ao Item (TRI), utilizada na análise dos resultados. Mas esse modelo foi abandonado a partir de 2011, sendo adotados os resultados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como registro do desempenho dos estudantes calouros. Desse modo, a partir de 2011, o ENADE tem sido aplicado apenas a licenciandos concluintes.

Neste estudo, são analisadas quatro questões discursivas do ENADE, aplicadas a discentes de Licenciatura em Matemática, que demandam raciocínio dedutivo, uma de cada um dos exames de 2008, 2011, 2014 e 2017. Por meio da análise dos resultados dessas questões, incluídos nos relatórios disponibilizados pelo MEC, foi possível refletir sobre o desempenho dos futuros professores de Matemática do país, durante o curso de formação inicial.

Do ENADE de 2008 foi destacada a questão 40, aplicada a licenciandos ingressantes e concluintes, conforme ilustra a figura 4:

Figura 4 – Questão discursiva 40 do ENADE/2008.

No retângulo $ABCD$ ao lado, o lado AB mede 7 cm, e o lado AD mede 9 cm. Os pontos I, J, K e L foram marcados sobre os lados AB, BC, CD e DA, respectivamente, de modo que os segmentos AI, BJ, CK e DL são congruentes.



a) Demonstre que o quadrilátero $IJKL$ é um paralelogramo. (valor: 3,0 pontos)

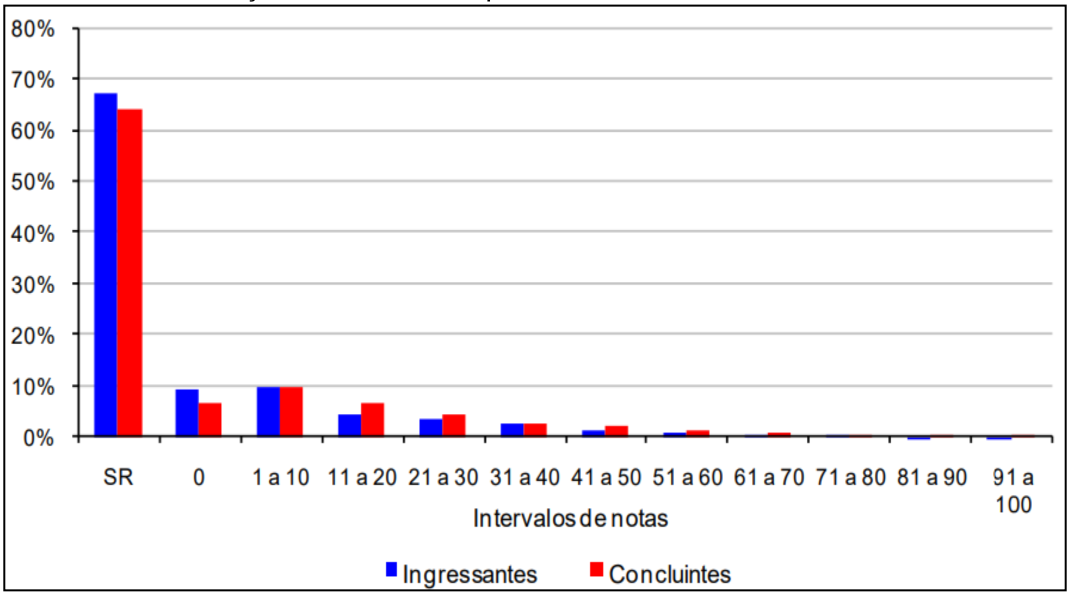
b) Escreva a função que fornece a área do paralelogramo $IJKL$ em função de x e determine, caso existam, seus pontos de máximo e mínimo. (valor: 4,0 pontos)

c) Na resolução desse problema, que conceitos matemáticos podem ser explorados com alunos do ensino fundamental e do ensino médio? (valor: 3,0 pontos)

Fonte: BRASIL (2008, p.17)

O número de respostas em branco e erradas foi muito próximo nos dois grupos: 67,4% dos licenciandos ingressantes e 64,6% dos concluintes deixaram a resposta em branco, enquanto 9,2% e 6,7%, respectivamente, responderam incorretamente. O relatório informa que a média geral da questão foi de 6,5 (no máximo de 100), sendo que os ingressantes tiveram média de 5,4 e entre os concluintes a média foi de 7,8. Cerca de 2% dos ingressantes alcançaram notas superiores a 51 pontos, e entre os concluintes essa percentagem aumenta para 4%. Os desvios-padrão indicam que a variabilidade entre ambos os grupos foi similar e, consequentemente, o desempenho médio também foi semelhante. O gráfico 1 mostra a distribuição das notas da questão 40, dos licenciandos ingressantes e concluintes.

Gráfico 1 – Distribuição das notas da questão discursiva 40 do ENADE/2008.



O relatório informa ainda que alguns estudantes

> confundiram o conceito de semelhança com o de congruência de triângulos e consideraram que um quadrilátero que possui apenas um par de lados opostos congruentes é um paralelogramo. Outros estudantes consideraram que um quadrilátero cujos pares de lados opostos são congruentes é um retângulo (BRASIL, 2008, p. 80).

O número de notas zero e de repostas em branco causa surpresa, uma vez que havia a oportunidade de acertar o último item, indicando conceitos matemáticos usados na resolução da questão, como o Teorema de Pitágoras, congruência de triângulos, comparação de ângulos, propriedades dos quadriláteros e o estudo do gráfico da função quadrática.

Caldato (2018) usou o primeiro item dessa questão em sua pesquisa, com o objetivo de identificar os argumentos utilizados pelos licenciandos para validar uma afirmação geométrica. Ela não foi escolhida aleatoriamente, mas por um resultado relevante, já que a maioria dos ingressantes deixou a questão em branco ou obteve nota zero no ENADE de 2008, gerando uma mediana inferior à média. Dos 78 licenciandos ingressantes que responderam ao item (a), apenas 41% da amostra conseguiu mostrar que o quadrilátero é um paralelogramo, em graus diferentes de rigor e de formalidade, de acordo com os tipos de provas de Balacheff (1988) de Harel e Sowder (1998).

O quadro 15 apresenta os tipos de respostas identificados por Caldato (2018) nas resoluções dos 78 licenciandos de sua pesquisa.

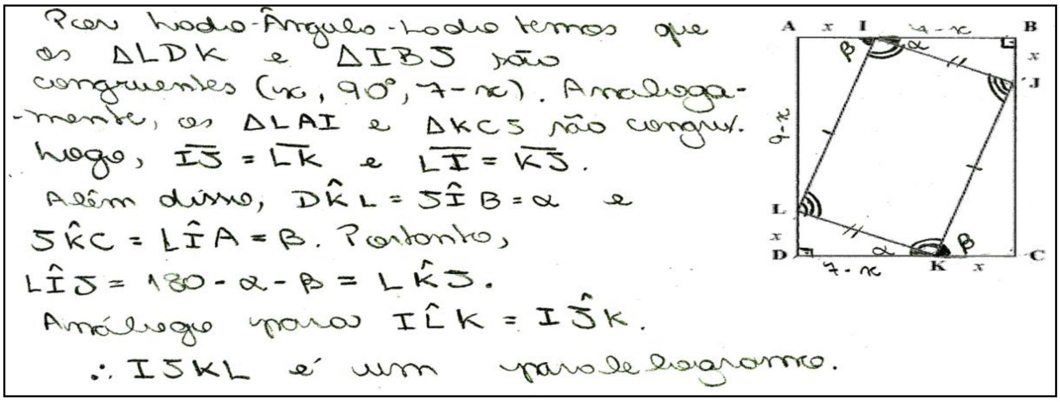
Quadro 1 - Distribuição dos tipos de respostas dos licenciandos ao item (a).

Tipos de respostas	Frequência
Demonstrou corretamente a tese (prova conceitual)	32
Apresentou algum erro conceitual	12
Apenas escreveu os lados do retângulo $ABCD$ em função de x corretamente ou afirmou que a tese era imediata	5
Sem justificativa	29
TOTAL	**78**

Fonte: CALDATO (2018, p.146).

De acordo com o quadro 1, verifica-se que 32 licenciandos conseguiram mostrar que o quadrilátero era um paralelogramo, a ponto de considerarmos uma prova conceitual, segundo Balacheff. Dentre eles, o argumento mais usual, e presente em 26 questionários, foi mostrar a congruência entre os triângulos. O estudante L66, por exemplo, inicialmente justificou a congruência pelo caso LAL, a partir da identificação dos ângulos constatou que o quadrilátero $IJKL$ possuía os ângulos opostos congruentes e concluiu que o polígono é um paralelogramo, conforme ilustra a figura 5.

Figura 5 – Resposta apresentada pelo licenciando L66



Fonte: CALDATO (2018, p. 147).

Em seu estudo, Caldato (2018) destaca ainda alguns equívocos geométricos presentes nas resoluções de 12 licenciandos. O principal erro cometido por eles foi considerar uma condição necessária como suficiente, ao descreverem que todo quadrilátero, cuja soma dos ângulos internos é 360º, era um paralelogramo, uma vez que este poderia ser um trapézio (quadrilátero que possui somente um par de lados opostos paralelos) ou outro quadrilátero não notável. Além disso, o pesquisador enfatiza que, apesar de 32 licenciandos terem obtido êxito nesta questão, a maioria da amostra (59%) não foi capaz de elaborar uma prova conceitual e evidencia a urgência “[...] de se trabalhar atividades de Geometria ao longo dos cursos de Licenciatura, para que os futuros professores se sintam aptos a abordar esse conteúdo na sua prática pedagógica em sala de aula” (p. 155-156).

No ENADE de 2011, a questão 4, descrita na figura 6, foi aplicada apenas aos estudantes concluintes, da Licenciatura e do Bacharelado. Mais de 90% dos licenciandos deixaram essa questão em branco ou obtiveram nota zero, o que pode ser um indicativo de que esses estudantes não conseguem fazer uma prova por indução, mesmo seguindo os passos encaminhados nos itens.

Figura 6 – Questão discursiva 4 do ENADE/2011.

Considere a sequência numérica definida por

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n}{2+a_n^2}, para\ n \geq 1. \end{cases}$$

Use o princípio de indução finita e mostra que $a_n < \sqrt{2}$, para todo número natural $n \geq 1$ e para $0 < a < \sqrt{2}$, seguindo os passos indicados nos itens a seguir:

a) escreva a hipótese e a tese da propriedade a ser demonstrada; (valor 1,0 ponto)

b) mostre que $s = \frac{4a}{2+a^2} > 0$, para todo $a > 0$; (valor 1,0 ponto)

c) prove que $s^2 < 2$, para todo $0 < a < \sqrt{2}$; (valor: 3,0 pontos)

d) mostre que $0 < s < \sqrt{2}$; (valor: 2,0 pontos)

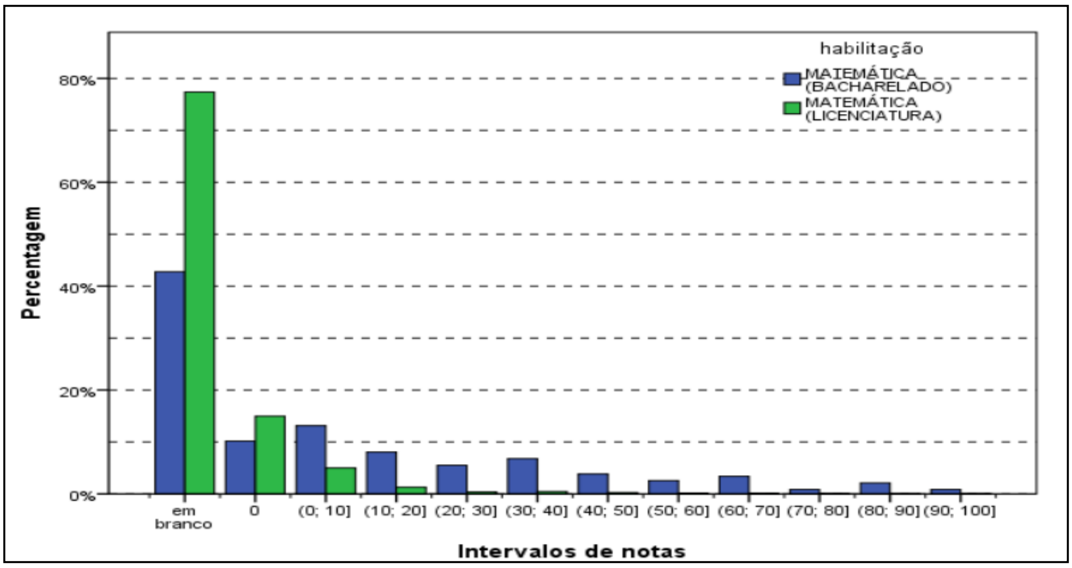
e) suponha que $a_n < \sqrt{2}$ e prove que $a_{n+1} < \sqrt{2}$; (valor: 1,0 ponto)

f) conclua a prova por indução. (valor: 2,0 pontos)

Fonte: BRASIL (2011, p. 18)

O gráfico 2 mostra a distribuição das notas atribuídas aos estudantes concluintes de ambos os cursos de graduação, em que fica evidente o melhor desempenho dos alunos do Bacharelado em comparação com os da Licenciatura.

Gráfico 2 – Distribuição das notas da questão discursiva 4 do ENADE/2011.



Fonte: BRASIL (2011, p. 73).

De acordo com o relatório do ENADE 2011, o baixo desempenho dos estudantes vai além do que é representado pelos dados estatísticos contidos no relatório: a questão

4 não apenas solicita uma demonstração por meio do Princípio da Indução, mas ela também indica, de forma detalhada, todos os passos que devem ser seguidos para que ela seja concluída. O insucesso em sua resolução revela o amplo desconhecimento desse importante recurso dedutivo, assim como dos aspectos algébricos elementares que os perpassam.

No universo de estudantes que tiveram desempenho não nulo, aqueles com desempenho fraco acertaram, completamente ou parcialmente, apenas os itens (a) e (b). Muitos concluintes consideraram, no item (a), o fato de que $0 < a < \sqrt{2}$ como parte da tese. No item (b), atribuíram valores para "a" com o objetivo de concluir que $S > 0$, usando empirismo ingênuo descrito por Balacheff. Neste caso o valor mais escolhido foi $a = 1$. Em alguns casos, o item (d) foi concluído a partir do item (c), sem que esse último tivesse sido feito. Além disso, ao realizarem as manipulações algébricas pertinentes aos itens (c) e (e), consideraram, equivocadamente que, dados a < b e c < d, tem-se $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Do ENADE de 2014, foi analisada a questão discursiva 4, conforme ilustra a figura 7, respondida apenas pelos concluintes do curso de Licenciatura.

Figura 7 – Questão discursiva 4 do ENADE/2014.

O número de ouro é conhecido há mais de dois mil anos, sendo encontrado nas artes, nas pirâmides do Egito e na natureza. Para construir o número de ouro apenas com o auxílio de uma régua não graduada e de um compasso, utiliza-se o seguinte procedimento: dado um segmento AB qualquer, marca-se o seu ponto médio; constrói-se o segmento BC perpendicular a AB e com a metade do comprimento de AB; marca-se o ponto E sobre a hipotenusa do triângulo ABC, tal que $\overline{EC}$ e $\overline{BC}$ sejam iguais; e determina-se o ponto D no segmento AB tal que $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ sejam iguais. Com esse procedimento, o ponto D divide o segmento AB na razão áurea. A partir da construção geométrica do número de ouro e considerando x como o comprimento do segmento AB, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentado os cálculos utilizados na sua resolução.

a) Determine o comprimento do segmento AC em função de x. (valor: 4,0 pontos)

b) Determine o comprimento do segmento AD em função de x. (valor: 4,0 pontos)

c) Determine o número de ouro dado pelo quociente $\frac{AB}{AD}$. (valor: 2,0 pontos)

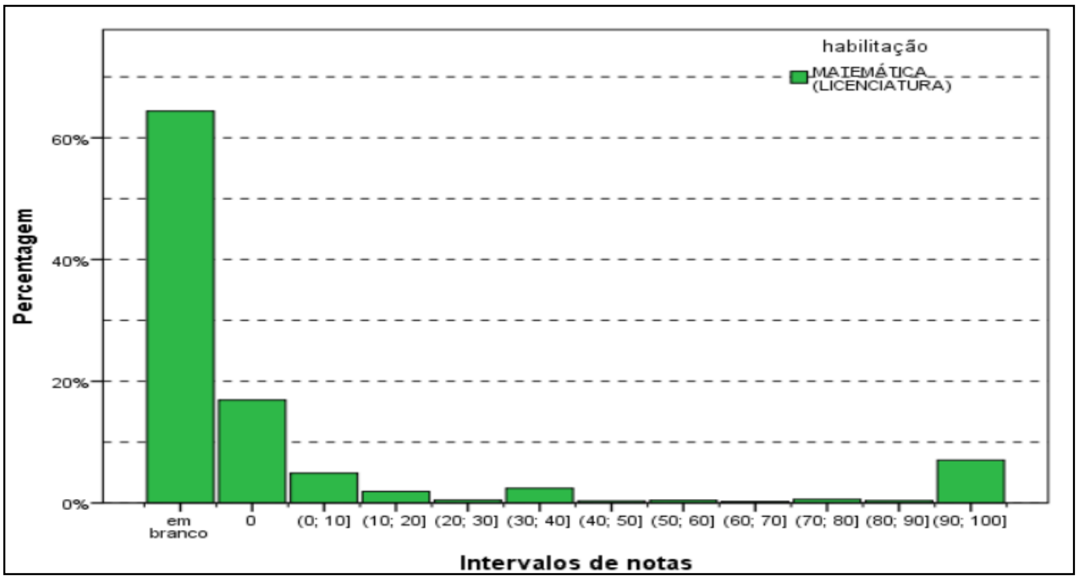
Fonte: BRASIL (2014, p.10)

Apesar de não pedir uma justificativa ou argumentação, esta questão demandava um raciocínio dedutivo para chegar ao número de ouro. A média geral do Brasil foi 10,2 (no máximo de 100), sendo que o percentual de resoluções em branco ficou em torno de 65%. As medianas e as notas mínimas foram zero em todas as regiões do país, o que significa que pelo menos 50% dos estudantes obtiveram nota zero ou deixaram a questão em branco. O gráfico 3 mostra que essa porcentagem foi superior a 80%.

De acordo com o relatório do ENADE 2014, a apresentação de inúmeras construções erradas indica que os estudantes não estão acostumados a acompanhar uma construção geométrica sem o apoio de figuras. Os cálculos ofereceram dificuldades aos estudantes por envolver radicais. Esse comportamento aponta para esquemas do tipo ritual e perceptivo, de acordo com o referencial de Harel e Sowder (1998). Em resumo, as respostas erradas dos estudantes ocorreram nas dimensões geométrica e algébrica. O relatório conclui que os estudantes estão ingressando no Ensino Superior

> sem os conhecimentos mínimos que deveriam ter sido consolidados na Educação Básica e não encontram, nos cursos de graduação em Matemática, políticas de acolhimento capazes de ajudá-los a superarem tais dificuldades. (BRASIL, 2014, p. 89).

Gráfico 3 – Distribuição das notas da questão discursiva 4 do ENADE/2014.



Fonte: BRASIL (2014, p. 87).

Já em 2017, havia no ENADE uma questão discursiva que exigia pensamento algébrico, ilustrada na figura 8. Nesse caso, a prova por indução é bem mais simples que a da questão de 2011.

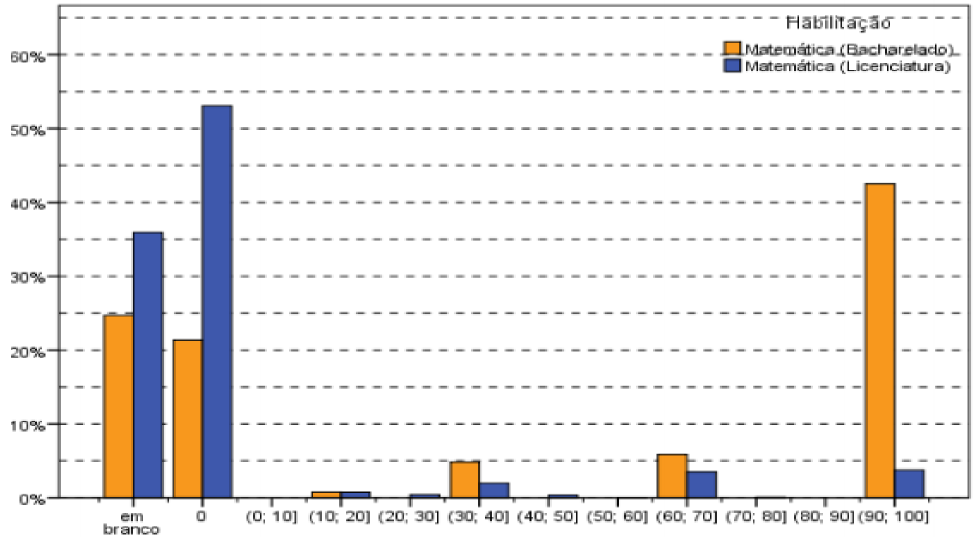
Figura 8 - Questão discursiva 3 do ENADE 2017.

A divisibilidade entre números inteiros é um conceito estudado há mais de 2000 anos, e tem implicações modernas, como na criptografia, que permite codificar informações a fim de transmiti-las com segurança. Nesse contexto, prove que, se n é um número inteiro positivo, então $2n^3 - 3n^2 + n$ é divisível por 6. (valor: 10,0 pontos)

Fonte: BRASIL (2017, p. 13)

O Gráfico 4 mostra a distribuição das notas na questão discursiva 3, aplicada aos estudantes de Licenciatura e de Bacharelado em Matemática. Observa-se que na distribuição das notas da Licenciatura, 36% dos participantes deixaram a resposta em branco e cerca de 53% dos que tentaram responder à questão receberam nota zero. Assim, quase 90% dos estudantes não receberam pontuação na questão 3. Na distribuição do Bacharelado, apesar de haver uma proporção considerável de respostas em branco e de notas zero, a moda ocorre no intervalo (90; 100].

Gráfico 4 – Distribuição das notas da questão discursiva 3 do ENADE/2017.



Fonte: BRASIL (2017, p. 263).

Vale observar que o número $2n^3 - 3n^2 + n$ é divisível por 6 para qualquer número inteiro n, e não apenas para os inteiros $n \geq 1$. A inclusão de tal restrição, aparentemente, buscava destacar a possibilidade de resolução do problema por meio de uma única aplicação do Princípio da Indução Finita.

A questão pode ser considerada fácil e não deveria ter oferecido dificuldades aos estudantes de ambos os cursos, uma vez que o problema apresentado é absolutamente semelhante àqueles tradicionalmente utilizados como exemplos iniciais da aplicação do Princípio da Indução Finita, ou da consideração de congruências modulares.

De acordo com o Relatório do ENADE 2017, as soluções que foram apresentadas pelos estudantes podem ser agregadas em três categorias, contempladas pelo padrão de respostas. “Em ordem decrescente de frequência de ocorrência, os tipos de solução foram: por meio do Princípio da Indução Finita; por meio da análise dos fatores presentes nas decomposições e por meio da utilização da aritmética modular mod 6, ou, concomitantemente, das aritméticas mod 2 e mod 3.” (p. 264).

Embora o relatório afirme que “o enunciado da questão não oferecia ambiguidades” (BRASIL, 2017, p. 263), muitos estudantes fizeram uma interpretação equivocada. Do modo como foi redigida, esta questão dá margem a uma interpretação ingênua, que encontramos com frequência entre os alunos, em consonância com as pesquisas correlatas. Eles assumem que “se n é um número inteiro positivo”, então basta escolher um número natural qualquer e substituir na expressão dada para mostrar que o resultado é um número múltiplo de 6. Para ilustrar isso, exibimos um possível exemplo de resposta na figura 9:

Figura 9 - Tipo de resposta frequente entre os licenciandos.

Se n é um número inteiro positivo qualquer, posso escolher, por exemplo, n = 2. Substituindo na expressão: *$2.2^3 - 3.2^2 + 2 = 2.\ 8 - 3.\ 4 + 2 = 6$, que é múltiplo de 6.*

Fonte: Autoria própria.

Essa justificativa é classificada como empirismo ingênuo na teoria de Balacheff (1988) e como esquema de prova empírica na de Harel e Sowder (1998), e não é aceita como uma demonstração. Se os futuros professores cometem esse tipo de equívoco, como esperar que eles desenvolvam atividades dedutivas em suas aulas? Isso justifica a necessidade de vivenciarem, durante a sua formação, situações que os levem a refletir sobre a importância do processo dedutivo, para que estejam aptos a usá-las quando atuarem na Educação Básica.

Alguns alunos usaram corretamente a demonstração por indução, ganhando os 10 pontos na questão. No entanto, um grande número de graduandos iniciou os passos da verificação por indução, mas não conseguiu usar que o resultado era válido para n para mostrar a validade para $n+1$. Nesse caso, tiveram um acerto parcial.

A pesquisa desenvolvida por Caldato (2018) também continha uma questão do mesmo tipo que a questão analisada do ENADE 2017, porém mais simples. O enunciado era direto: "Mostre que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3".

A conjectura a *priori* para essa questão era que a maioria dos licenciandos ingressantes usaria argumentos empíricos, presentes tanto na classificação de Balacheff, como na de Harel e Sowder. Como na questão do ENADE 2017, as soluções podiam se basear no Princípio da Indução Finita, na análise dos fatores ou na aritmética modular. A vantagem é que nesta questão, a expressão já era dada como um produto de expressões de grau 1, dispensando a etapa de fatoração.

O quadro 2 descreve os tipos de respostas apresentadas pelos 78 licenciandos da amostra.

Quadro 2 - Distribuição dos tipos de respostas presentes na questão 6.

Tipos de respostas	Frequência
Sem justificativa	26
Verificação empírica	16
Análise dos fatores.	16
Indução finita	9
Justificou para a soma	4
Incompleta ou inconsistente	5
Outras	2
TOTAL	**78**

Fonte: CALDATO (2018, p.157).

Com base no quadro 2, foi possível constatar que a conjectura não foi validada, visto que a maior frequência foi 26, referente aos participantes que não apresentaram justificativas. Este grupo reuniu exatamente um terço da amostra, dentre os quais 8 deixaram a questão em branco e 18 escreveram que não sabiam mostrar o resultado. É possível que esses últimos estudantes tenham a concepção de que "mostrar" está relacionado a uma escrita matemática formal e rigorosa, e que não se sentiram aptos a tentar responder.

Em resumo, tanto os resultados dos exames do ENADE quanto a pesquisa de Caldato (2018) indicam a necessidade de cometer uma “insubordinação criativa”. Trata-se de extrapolar o enfoque tradicional no ensino de Matemática, no sentido sugerido por D’Ambrosio e Lopes (2015), quando afirmam acreditar que

> a construção resultante da reflexão e da tomada de decisão sobre suas ações profissionais possa levar os educadores matemáticos a assumir atos de subversão responsável, necessários para criar novas práticas em Educação Matemática. (p. 13-14).

Ainda nesse sentido, num processo de insubordinação criativa, Couto, Fonseca e Trevisan (2017) sugerem que os estudantes sejam convidados a trabalhar a partir de tarefas investigativas, numa tentativa de posicioná-los como *autores da Matemática,* buscando *perceber e respeitar* seu processo de desenvolvimento intelectual e emocional.

Considerações Finais

Os resultados das questões discursivas do ENADE indicam que os licenciandos concluem o curso com pouca habilidade em argumentação, em consonância com os resultados encontrados há quase 20 anos por Nasser (2000), tendo em vista a alta porcentagem de respostas em branco e erradas.

Isso indica que durante o curso de Licenciatura há pouca evolução nas experiências com atividades argumentativas e/ou dedutivas. Os relatórios do ENADE consultados indicam que na questão discursiva de 2011 ficaram claras as dificuldades em executar tarefas que envolvem a compreensão de instruções apresentadas textualmente. Além disso, os erros encontrados na questão de 2014 revelaram a dificuldade de extrair informações básicas de textos simples, e um baixo domínio em manipulações algébricas e construções geométricas elementares.

A pesquisa de Caldato (2018) sugere uma abordagem problematizada nos cursos de licenciatura, de modo que o futuro professor possa estabelecer relações entre o conteúdo matemático e seu ensino, sendo capaz de articular os teoremas demonstrados na universidade com a sua prática, a fim de fomentar os “porquês” da Matemática no âmbito escolar, em detrimento de respostas prontas e resultados imediatos.

A análise dos resultados dos exames oficiais aplicados a licenciandos aponta na direção de que é preciso reverter esse quadro e, portanto, cabe aos formadores de professores, docentes dos cursos de Licenciatura, criar oportunidades que propiciem o desenvolvimento do processo dedutivo dos licenciandos. Estes devem estar cientes de que a prova tem outras funções além da verificação/convicção da validade de um argumento. A prova pode, por exemplo, assumir o papel de explicar porque o resultado é verdadeiro, facilitando a compreensão dos alunos (DE VILLIERS, 1990).

Portanto, apoiados no referencial teórico adotado neste trabalho, sugerimos uma insubordinação criativa, inspirada nos trabalhos de D’Ámbrósio e Lopes (2015) e de Couto, Fonseca e Trevisan (2017). Trata-se da apresentação de atividades exploratório-investigativas ao longo de toda a formação dos licenciandos, pois não é suficiente que o futuro professor conheça do ponto de vista teórico o que consiste e para que serve uma demonstração. É preciso que seja capaz de elaborá-la ou, ainda, fazer uma transposição para explorá-la em atividades investigativas e/ou dedutivas junto aos seus alunos no futuro, instigando-os a produzir suas próprias argumentações.

Referências

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.

ALMOULOUD, S. A.; FUSCO, C. A. S. Discutindo algumas dificuldades de professores dos Ensinos Fundamental e Médio a respeito da demonstração em Matemática. In: **SIPEM**, 3, 2006, Águas de Lindóia – SP, Anais. SBEM, 2006, p. 127.

BRASIL. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – Relatório Síntese**: Matemática. Brasília: INEP/MEC, 2008.

______. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – Relatório Síntese**: Matemática. Brasília: INEP/MEC, 2011.

______. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – Relatório de Área**: Matemática. Brasília: INEP/MEC, 2014.

______. **Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes – Relatório Síntese de Área**: Matemática (Bacharelado/Licenciatura). Brasília: INEP/MEC, 2017.

BALACHEFF, N. Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: D. PIMM (Ed.), **Mathematics teachers and children**. London: Hodder and Stoughton, 1988, p. 216-235.

CALDATO, J. C. **Argumentação, prova e demonstração**: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2018.

CALDATO, J.; UTSUMI, M. C.; NASSER, L. Argumentação e Demonstração em Matemática: a visão de alunos e professores. **Triângulo**, v. 10, n. 2, p. 74-93, jul./dez. 2017.

COUTO, A. F.; FONSECA, M. O. S; TREVISAN, A. L. Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: um convite à insubordinação criativa. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 8, n. 4, p. 50-61, 2017.

D'AMBROSIO, B. S.; LOPES, C. E. Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. **Bolema**, v. 29, n. 51, p.1-17, 2015.

DE VILLIERS, M. The role and function of proof in Mathematics. **Pythagoras**, n. 24, p.17-24, 1990.

FERREIRA, M. B. C. **Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2016.

HAREL, G.; SOWDER, L. Students' proof schemes: Results from exploratory studies In: SCHOENFELD, A.; KAPUT, J.; DUBINSKY, E. (Ed.), **Research in Collegiate Mathematics Education III**. Providence/RI: American Mathematical Society, 1998. p. 234-283.

HOYLES, C. The curricular shaping of students' approaches to proof. **For the Learning Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 7-16, 1997.

MATEUS, M. E. A. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes às demonstrações e provas na Educação Básica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, 2015.

NASSER, L. O domínio do processo dedutivo por alunos de graduação em Matemática. In: **SIPEM**, 1, 2000, Serra Negra – SP, Livro de Resumos. SBEM, 2000, p. 140-145.

ORDEM, J. **Prova e demonstração em geometria plana**: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2015.

PEZARINI, A. R.; MACIEL, M. D. Avaliação dos argumentos e das argumentações produzidas pelos estudantes de Ciências e Biologia a partir de uma proposta didática pautada em Toulmin e Bonini. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)**, v. 10, n. 1, p. 27-47, 2019.

PIETROPAOLO, R. C. **(Re)significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de Matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education**: Research, Learning and Teaching. Rotterdam: Sense Publishers, 2010.