FACES DA BANDA DE MÖBIUS

Faces of Möbius'Band

José Carlos Pinto Leivas

Universidade Franciscana/PPGECIMAT/leivasjc@yahoo.com.br

Anne Desconsi Hasselmann Bettin

Rede Estadual de Ensino do RS/nanydh@yahoo.com.br

Rosvita Fuelber Franke

Universidade do Vale do Rio dos Sinos/Curso de Matemática/rosvitaf@unisinos.br

Resumo

Neste artigo, apresentamos uma pesquisa bibliográfica-teórico-metodológica realizada por um grupo de pesquisa, que teve por objetivo investigar possibilidades de uso e aplicações da Banda de Möbius em diversas áreas, como forma de inserir tal conteúdo no ensino de Geometria. Iniciamos com a obtenção dessa superfície por faixas de papel como recurso didático concreto e usamos intuição para caracterizar uma superfície topológica unilateral. Buscamos ligações interdisciplinares, identificando seu uso em obras literárias onde a mistura entre funções do autor e leitor, em passagem contínua, ocorre de forma análoga ao que acontece com a superfície de Möbius. Estabelecemos sua conexão com a obra de Lacan, ao utilizá-la para explorar diversos estágios da psique humana. Identificamos, ainda, a beleza visual da Banda na arquitetura, explorando paisagismo/turismo, além da indústria moveleira. Exploramos no GeoGebra 3D, para desenvolver habilidades visuais, em que propriedades topológicas são indicadas, de modo a estimular o professor a elaborar atividades para o ensino de Geometria nos diversos níveis de escolaridade. Como finalização, o nosso grupo de estudos e pesquisas em Geometria indica o uso da Topologia, por independer de medidas, como no caso da Geometria Euclidiana, para o ensino e aprendizagem de Geometria por meio de atividades intuitivas/exploratórias.

Palavras-chave: Máxi Banda de Möbius, Psicanálise, Arquitetura, Indústria moveleira, Literatura.

Abstract

In this article, we present a bibliographic-theoretical-methodological research carried out by a research group, whose objective was to investigate the possibilities of use and applications of the Möbius'Band in several areas, as a way to insert such content in the teaching of Geometry. We started with obtaining this surface from a strip of paper and we use the intuition in order to characterize a unilateral topological surface. We identifying its use in literary where the mixture between the functions of the author and the reader, in continuous passage. We establish the connection of the Band to Lacan's work when he uses it to explore the various stages of the human psyche. We also identify the visual beauty when it is used in architecture, exploring landscaping / tourism, and the use in the furniture industry. Finally, we explore GeoGebra 3D to develop visual abilities, in order to stimulate the teacher to elaborate motivational activities for the teaching of Geometry in the different levels of schooling. As a conclusion, the group indicates the use of Topology, regardless of measures such as Euclidean geometry, to stimulate / encourage the teaching and learning of Geometry, through intuitive / exploratory activities.

Keywords: Möbius'Band, Psychoanalysis, Architecture, Furniture industry, Literature.

Introdução

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998), o campo da Geometria é "fértil para se trabalhar com situações-problema e é tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas [...]" (p.51). No mesmo documento, no que diz respeito ao terceiro ciclo do Ensino Fundamental, para o ensino e aprendizagem do bloco Espaço e Forma, em termos de conceitos e procedimentos, recomenda que "o aluno seja capaz de distinguir, em contextos variados, figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria". (p.72-73).

Há dois aspectos a considerar quando pensamos em Topologia: o primeiro aborda uma Matemática formal a partir de conceitos nem sempre triviais e de difícil compreensão para quem não tem formação; o segundo diz respeito à forma visual e intuitiva de compreendê-la, sendo nesse aspecto que iremos abordá-la no presente artigo. Topologia é uma área da Geometria que considera as propriedades dos objetos que não se alteram por dobragem, alongamento, dilatação ou torção, que são os elementos específicos das transformações topológicas. Por exemplo, quaisquer três pontos sobre a circunferência de um arco manterão as suas posições relativas por mais que tal arco seja dobrado, alongado ou torcido. Uma propriedade como essa chama-se "invariante topológico". Para nós, esse ramo da Geometria é mais compreensível do que a Geometria Euclidiana, por independer da 'métrica' utilizada e indicamos que o ensino dessa área deveria começar por tais propriedades.

No estudo realizado, centramos nossa atenção em uma superfície específica com muitas propriedades e aplicações importantes para a Geometria. A Banda de Möbius[1] propicia a transformação de uma região retangular plana em uma superfície unilateral. Para Piaget e Inhelder (1993), uma das propriedades topológicas elementares é a "continuidade" e essa aparece facilmente em experimento concreto que pode ser realizado no nível de escolaridade mais básico, mostrando a importância da Topologia na formação geométrica inicial dos estudantes.

[1] Usaremos, no texto, esta grafia, exceto em citações literais, uma vez que aparece na literatura de diversas formas.

A Banda de Möbius foi estudada simultaneamente por Johann Benedict Listing (1808-1882) e August Ferdinand Möbius (1790 – 1868) ambos matemáticos alemães. Mas foi Möbius que, com aproximadamente 70 anos, levou os estudos mais adiante e explorou com maior aprofundamento propriedades dessa superfície que levou seu nome. Anos após a sua morte essa superfície, tão importante para a Topologia, ganhou popularidade e mostrou ter aplicação em inúmeras áreas da Matemática, na ciência, na arte, na literatura e na psicanálise, onde foi usada por Jacques Lacan para representar estados da psique humana.

A superfície é descrita por Araújo (1998) como aquela obtida quando se colam as duas extremidades de uma região retangular de papel, alongada, de modo a coincidirem os vértices opostos. Na Geometria Diferencial, a banda é apresentada como um importante exemplo de superfície não-orientável. Entendemos por superfície orientável aquela em que podemos diferenciar o lado de cima do lado de baixo, o de dentro e o de fora, o interior do exterior, havendo, pois, um lugar geométrico de passagem de um para outro, denominado fronteira da superfície. Dienes e Golding (1975), em seu livro A geometria pelas transformações I, trazem um exemplo claro e intuitivo do que seja fronteira.

> Consideremos um sólido qualquer. Ele ocupa certo domínio do espaço ou, em outras palavras, existe uma superfície que delimita o interior e o exterior do sólido. Uma pedra, por exemplo, possui uma superfície. No interior dessa superfície se encontra a pedra e, no exterior, o resto do mundo. Esta superfície é a fronteira da pedra. (p. 03)

Na Banda de Möbius não é possível diferenciar um lado do outro e tal característica é claramente observada quando tentamos colorir um deles com uma cor e o outro, com uma cor diferente. Verificamos que essa ação é impossível de ser concretizada, assim como percorrê-la apoiando o dedo sem deslocá-lo do objeto, pois haverá o retorno ao ponto de partida de forma contínua.

Figura 1 - Banda de Möbius.
Fonte: construção própria.

Observamos, na Figura 1, que uma tira com dois lados, um na cor branca e outro na azul, foi colada por suas extremidades, dando uma pequena torção. O novo objeto passa a ter um único lado, podendo ser percorrido, continuamente, passando do lado azul ao branco sem interrupção.

O grupo de estudos e pesquisa em Geometria – GEPGEO em que atuamos, liderado pelo primeiro autor, faz parte de um programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e

Matemática e tem por objetivo investigar o ensino e a aprendizagem em Geometria nos diversos níveis de ensino, bem como propor atividades na busca de novas possibilidades para essa área, uma vez que estudos mostram haver, ainda, certa falta de interesse pelo conteúdo. Almouloud (2016) aborda os processos de análise e experimentação de situações-problema na apropriação de conhecimentos/saberes matemáticos por parte do aluno e no aprimoramento da prática docente. O autor indica que "[...] o professor deve construir situações-problema que contribuam para a formação dos alunos, tanto na construção de conceitos matemáticos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que os auxiliem na elaboração de estratégias adequadas para resolução de problemas de matemática." (p.113)

Em algumas instituições superiores de formação de professores persistem, ainda, um semestre de geometria plana, outro de espacial, um de geometria analítica e, não mais, desenho geométrico e geometria descritiva o que, em nosso entender, dificulta a visualização e a representação em Geometria. Piaget e Inhelder (1993) indicam que a representação só ocorre após internalizarmos a percepção, a qual ocorre na presença do objeto. Assim, a visualização se torna um construto mental, segundo Leivas (2009), que serve para representar objetos mentalmente e que, no entanto, estudantes aprendem Geometria de forma eficiente, como mostrou o estudo de Silva e Leivas (2014).

Partindo dos pressupostos apresentados, o GEPGEO deliberou como tema a ser desenvolvido no ano de 2016 a "Banda de Möbius" e suas "mil faces", uma vez que não é uma superfície muito explorada no ensino, servindo, algumas vezes, apenas para motivar palestras, por exemplo. Dessa forma, tomamos como questão de pesquisa: investigar possibilidades de uso e aplicações da Banda de Möbius em diversas áreas da Matemática e de que forma inserir tal conteúdo no ensino de Geometria.

Metodologia da pesquisa

Neste artigo, apresentamos resultados de uma pesquisa de cunho bibliográfico, a qual iniciou com a dita "geometria elástica" por alguns ou "geometria da borracha" por outros e, formalmente, constituindo-se na Topologia como subárea da grande área Matemática.

Fiorentini & Lorenzato (2006) afirmam que a pesquisa bibliográfica ou histórico-bibliográfica "é aquela que se faz preferentemente sobre documentação escrita" (p. 102), sendo que, nessa forma de investigação, a coleta de dados é feita mediante fichamento de leituras. A pesquisa realizada por Kilpatrick (1994, apud Fiorentini & Lorenzato, 2006) apontou algumas tendências de temas para a Educação Matemática, dentre as quais o GEPGEO, neste momento, se ateve a 'conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor'.

Nesse sentido, estudar a Banda de Möebius e fazer uma coleta de informações a respeito de suas aplicabilidades é procedente, uma vez que a Topologia é considerada, por alguns, como pertencente apenas à área dura da Matemática e sem aplicabilidade ao ensino. Em geral, nos cursos de formação de professores do Brasil, essa disciplina não faz parte dos currículos, sendo delegada ao Bacharelado. Assim, Fiorentini & Lorenzato (2006), a respeito do conhecimento profissional do professor de Matemática afirmam: "continua em alta o debate sobre que tipo de conhecimento matemático deve ter o professor e como deve combiná-lo com seu conhecimento pedagógico". (p.49).

Entendemos que esta é uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo pois, de acordo com Moreira (2009), ela é mais inclusiva, apresenta interesse central "na questão de significados que as pessoas atribuem a eventos e objetos, em suas ações e interações dentro de um contexto social e na elucidação e exposição desses significados pelo pesquisador" (p. 47). Assim, descobrir aplicações de uma superfície que, a priori, parece apenas ilustrar um conteúdo de Geometria, sendo de pouco conhecimento e aplicabilidade no ensino, torna-se relevante para a formação continuada de professores de Matemática.

O GEPGEO é constituído por seu líder, professor doutor atuando num Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, orientandos de mestrado e doutorado, alunos e ex-alunos do Programa interessados por Geometria, professores da escola básica e um professor de outra instituição de ensino superior. Os encontros são quinzenais e ocorrem na instituição em que o líder atua. O presente artigo, resultado da pesquisa anual, vai assinado por ele, o professor da IES e um mestre do Programa, atuante na escola básica e pertencente ao GEPGEO. Pretendemos indicar, na sequência do artigo, aplicações da Banda em diversas áreas do conhecimento, culminando com uso do GeoGebra 3D nas explorações visuais da superfície e seus componentes geométricos.

Das Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores da educação básica (BRASIL, 2002) destacamos, dentre outros encaminhamentos, os que seguem, pois a formação deve atentar para:

> [...] o exercício de atividades de enriquecimento cultural;
> - o aprimoramento de práticas investigativas;
>
> - o uso de tecnologias da informação e comunicação e de metodologias e materiais de apoio inovadores;
> - os conteúdos, como meio e suporte para a constituição das competências;
> - a pesquisa, com foco no processo de ensino e de aprendizagem, uma vez que ensinar requer, tanto dispor de conhecimentos e mobilizá-los para a ação, como compreender o processo de construção do conhecimento;
> - as instituições de formação trabalharão em interação sistemática com as escolas de educação básica, desenvolvendo projetos de formação compartilhados. (s.p).

Nesse sentido, o GEPGEO, com participantes atuando tanto em ação continuada quanto em outros espaços, se propôs a realizar estudos e pesquisas que atendam a tais recomendações, mais especificamente na área de Geometria, propiciando um enriquecimento cultural do professor e futuro professor, bem como a utilização de Geometria Dinâmica no desenvolvimento de habilidades visuais. Consideramos, ainda, que o Programa possui um Mestrado Profissional, ou seja, atende a um público em exercício profissional sendo, assim, um dos objetivos do mesmo atender a essa demanda por meio de novas pesquisas que propiciem ensino e aprendizagem geométrica.

A coleta de dados foi feita mediante registros em atas das sessões de estudo, complementados por pesquisas individuais realizadas a distância, as quais foram partilhadas em documento de livre acesso pelos participantes.

Desenvolvimento

Na sequência, faremos indicativos de uso da Banda em diversas áreas do conhecimento.

Uso na literatura

A Banda de Möbius, também denominada Faixa ou Anel, é empregada para ilustrar algumas áreas do conhecimento. Por exemplo, na questão do ‘jogo de palavras’, isto é, na aproximação entre literatura e hipertexto, o que é abordado por Moreira e Fux (2010) a respeito das obras de Italo Calvino. De acordo com eles, o escritor italiano “utiliza a estrutura criada como elemento propiciador da discussão, como mote para o jogo reflexivo sobre leitura e escrita” (p.62). Afirmam eles ser importante a relação entre o hipertexto e as práticas literárias do grupo matemático-literário OULIPO, “pelas quais se constroem narrativas reticulares e potenciais a partir de restrições matemáticas e combinatórias” (Idem, p.63). Em sequência, o texto indica que Calvino, em uma de suas obras, mostra como ocorre a relação entre os personagens de cada capítulo e a estrutura geral do livro, exatamente como um algoritmo. Na obra, ele é tomado como um vetor em mobilidade constante e, nessa mobilidade, irá estabelecer com o leitor o diálogo que torna possível reconhecê-lo. De acordo com os autores, “Esse *looping* contínuo, caracterizado pela mistura das funções de autor e de leitor, pela ‘passagem contínua de dentro para fora’ é perfeitamente ilustrado com a superfície topológica Faixa de Möebius” (Ibidem, p.64).

Calvino utiliza essa superfície, pelo menos, em mais duas de suas obras O” castelo dos destinos cruzados” e “As cidades Invisíveis”. Nelas, ocorre uma história dentro de outra, num processo infinito e contínuo, ou seja, todas se encontram no mesmo lado da faixa, duas das características dessa superfície (unilateralidade e continuidade).

Pierre Levy denominou o processo de aproximação entre escrita e leitura como “efeito Möbius”, isto é, uma passagem do interior ao exterior e vice-versa, de forma contínua, sem fronteiras. Assim, verificamos que o modelo de superfície geométrica tem aplicabilidade na literatura o que, para o ensino de Geometria, é importante pois, em geral, os estudantes necessitam que o professor ilustre aplicações daquilo que ensina. Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) recomendam: [...] “o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo noções de direção e sentido [...]”. (p. 62-63). O documento aponta que o estudo do espaço e das formas envolve a Geometria, concebida como modelização do espaço físico e, dessa forma, o estudo da Banda de Möbius parece, no entender deste grupo de estudos e pesquisa, ser relevante para que o professor, nesse nível de ensino, possa discutir algumas possibilidades de seu uso, de forma simples, visual e concreta, para que os estudantes comecem a mergulhar no mundo geométrico não apenas pelos algoritmos, como tem sido o ensino dessa área do conhecimento matemático na escola básica.

Na literatura, a linguagem foi, em certa época, usada para retratar as palavras de forma simultânea, buscando formar uma imagem. Nas artes plásticas, no Cubismo, movimento artístico que surgiu no século XX, tendo como principais fundadores Pablo Picasso e Georges Braque, as formas da natureza eram representadas por meio de figuras geométricas que mostravam as partes de um objeto no mesmo plano. Sem nenhum compromisso com a aparência real das coisas, o Cubismo visava promover a decomposição, a fragmentação e a geometrização das formas. O quadro *Les demoiselles d'Avignon*, pintado em 1907, por Picasso, é conhecido como marco inicial do cubismo, onde corpos e fundos transformam-se em formas geométricas.

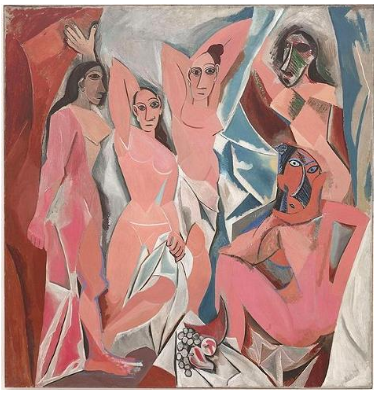


Figura 2 - Les demoiselles d'Avignon de Pablo Picasso.
Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Les_demoiselles_d%27Avignon#/media/File:579px-Les_Demoiselles_d%27Avignon.jpg

Uso na Psicanálise

O emprego de conceitos topológicos também é encontrado na Psicanálise, especificamente, nos estudos de Lacan, segundo alguns autores, como Souza e Leite (2010), ao afirmarem que o psicanalista fez uso dessa área da Matemática como recurso para pensar o Real em seus estudos e ensinamentos no desenvolvimento de sua obra. Para esses autores, houve três momentos: privilégio dos modelos gráficos; introdução de uma álgebra (os *mathemas*) e o recurso à Topologia, sendo o último o foco do interesse no presente trabalho.

Porge (2014) apresenta considerações a respeito da Topologia utilizada por Lacan em seus estudos psicanalíticos. Para o autor, Lacan faz uso dela não como algo que possa ser considerado como modelo, ilustração, esquematismo ou meio didático. Entendemos que, ao abordar ilustrações de aplicações da Banda de Möbius, o que interessa ao ensino de Geometria, é necessário indicar onde esse elemento geométrico foi empregado nas diversas áreas e usos.

Segundo Lacan, “a topologia equivale à estrutura: a estrutura do sujeito como corte, a estrutura do desejo em sua relação com a falta, a estrutura do gozo em sua relação com o lugar. A articulação entre desejo, gozo e sujeito é, por razões estruturais, topológica.” (PORGE, 2014, p. 97). Assim, no texto está presente o elemento matemático ‘transformação contínua’. Além disso, indica outros elementos matemáticos relevantes, como o desenho e as representações, as figuras, a questão da figurabilidade, histórico da

Topologia, os homeomorfismos, os nós, o espaço e a topologia algébrica. Apresenta as questões de dimensão de espaços representáveis ou não. Conforme Porge (2014, p. 105),

> a identificação presentifica o implícito de uma quarta dimensão. Tal quarta dimensão é justamente aquela com a qual se trabalha em Topologia. A inversão esquerda-direita no espelho procede de uma torção moebiana, surgida no percurso de uma Banda de Moebius. Na identificação, tudo acontece como se o sujeito a tivesse percorrido e tal percurso equivale à passagem por uma quarta dimensão do espaço.

De acordo com o psicanalista Magela (1998, p. 10), a Banda de Möbius faz "repensar conceitos, como o dentro e fora, interioridade e exterioridade, corpo e psiquismo, significante e significado". Ele afirma que "na compreensão de um fato clínico, o paciente pode ser compreendido como essa superfície, tanto possuindo uma exterioridade, como uma interioridade. A partir dela, verifica-se que o interior está incluído no exterior".

Conforme Souza Leite (2010, p. 32), "Lacan sugeriu que o pensamento ocidental estaria condicionado por uma visão euclidiana da realidade, que é a de pensar o espaço dividido em planos. Decorre daí que, na Psicanálise, se haver formalizado o consciente e o inconsciente em termos de 'dentro' e 'fora' ". Portanto, a Banda de Möbius é o modelo de superfície que permite localizar, nela própria, o inconsciente e o consciente numa passagem contínua, porém estando em lados opostos. O autor vai além, ao apontar que Lacan também modificou a concepção das noções de introjeção e projeção, mostrando que 'estar dentro' e 'estar fora' podem ser questionados, o que ocorre a partir da propriedade topológica dessa superfície, a qual não possui fronteira, sendo possível transitar continuamente de um lado a outro da mesma.

Magela (1998), ao buscar uma interpretação para a Lemniscata, imagem contida na primeira e última página do romance "Grande Sertão Veredas", de João Guimaraes Rosa, em seu artigo intitulado "Grande Sertão Veredas" e a Banda de Möbius, relembra os personagens e descreve a relação entre o doutor e Riobaldo "como semelhante a uma experiência psicanalítica" e comenta, no decorrer artigo, o qual pode ser acessado em https://pt.slideshare.net/peloburaco/a-bandademobiusem1708, que "a intuição lacaiana na utilização da Banda de Möbius na psicanálise nos conduz a pensar que o sujeito, seus objetos e o mundo, existem numa inter-relação complexa em continuidade e não na bipolaridade do dentro/fora" (p. 09). Ao fazer uma analogia entre o corte da Banda e a intervenção psicanalítica, afirma que "com o ato analítico da intervenção, a linearidade da fala é interrompida e cria-se a descontinuidade" (p. 09), cujos conceitos de continuidade, descontinuidade, linearidade, dentro/fora são objetos da topologia presentes nos estudos lacanianos.

Percebemos uma possibilidade de motivação para estudar Geometria desde o início da escolaridade, uma vez que o professor, conhecedor desse ramo, pode utilizar atividades concretas desencadeando, possivelmente, o processo de motivação interna dos alunos o que é, frequentemente. requisitado por eles na ânsia de saberem onde aplicar tal conteúdo.

Ás vezes, falta ao professor o conhecimento para satisfazer a curiosidade do aluno, o que 'quebra' sua motivação com a área e isso vai ao encontro do que é indicado nos

Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Médio - PCNEM, quanto ao sentido do aprendizado na área:

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. (BRASIL, 2000, p.6).

Uso na ciência

O artigo "Banda de Möbius em cristal líquido", publicado por Carlos[2] no blog ScienceBlogs Brasil, relata que cientistas da Universidade de Warwick demonstraram como fazer nós em cristais líquidos com o uso de uma Banda de Möbius em miniatura, feita de partículas de sílica, possibilitando a formação de novos materiais avançados e dispositivos fotônicos. Para temos uma ideia da importância dessa descoberta, o cristal líquido é um dos materiais presentes em televisores e smartphones, o que significa um grande avanço na área tecnológica. O texto pode ser encontrado em http://scienceblogs.com.br/chivononpo/2013/08/banda-de-mobius-em-cristal-liquido/. Na Figura 3, a seguir, mostramos nós de cristais líquidos criados em torno de partículas da miniatura da Banda de Möbius. Exemplos são mostrados para duas (a), três (b), quatro (c) e cinco torções (d).

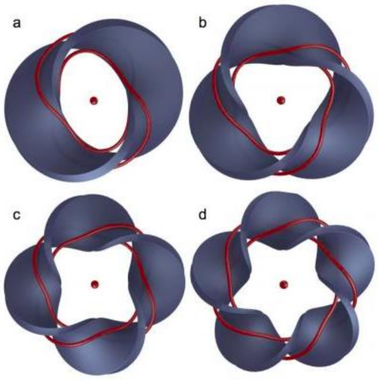


Figura 3 – Nós de cristal líquido
Fonte: Universidade de Warwick

Uso na arquitetura urbana

No que diz respeito a competências e habilidades do estudante do Ensino Médio, os PCNEM (BRASIL, 2000) indicam como capacidade de comunicação: utilizar as tecnologias básicas de redação e informação, como computadores; para a investigação e compreensão: articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva

[2] Disponível em < http://scienceblogs.com.br/chivononpo/tag/nanoeletronica/>. Acesso em 23 nov. 2017.

interdisciplinar; para contextualização sócio-cultural: utilizar elementos e conhecimentos científicos e tecnológicos para diagnosticar e equacionar questões sociais e ambientais. Dessa forma, no Ensino Médio, em que o estudante ainda não tem definida a sequência de estudos para sua formação futura, é importante que a escola proporcione opções de uso da Matemática e, em particular, da Geometria, as quais poderão servir, até mesmo, de motivação para suas escolhas profissionais futuras. Assim, explorar a Banda de Möbius, em projetos de construções civis e urbanísticos, pode ser um elemento inovador nessa área do conhecimento, cabendo ao professor de Geometria o estímulo e incentivo na busca profissional.

Por sua vez, o mesmo documento aponta como uma das finalidades do ensino de Matemática no Ensino Médio, "[...] estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo [...] (BRASIL, 2000, p.42).

Mas não são apenas os aspectos matemáticos da faixa de Möbius que servem de inspiração para inúmeros trabalhos. Suas características visuais e a beleza da forma são bastante exploradas na arquitetura e no design. A revista ARCOweb, https://arcoweb.com.br/ apresentou, em sua edição de 14 de novembro de 2013, uma reportagem citando o lago Meixi na cidade chinesa de Changsha. O cenário encantador levou os arquitetos de um importante escritório de arquitetura a receber prêmio em concurso internacional ao projetar uma ponte para pedestres com 160 metros de largura e 25 de altura sobre tal lago. Segundo a reportagem, um dos conceitos sobre o qual o projeto foi ancorado é o da Banda de Möbius.

Ao ser considerada essa superfície, no projeto, os visitantes poderiam percorrer caminhos ondulados em diferentes alturas, o que proporcionaria ao turista vistas panorâmicas do lago, das montanhas e da própria cidade. Como pode ser percebido, na Figura 4, o trajeto de ida e volta é percorrido de forma contínua, sem que o observador percorra o mesmo caminho de forma inversa, como é usual em percursos turísticos ou urbanos, proporcionando visão diferenciada ao longo dele, por se encontrar em níveis diferentes. Consideramos que outra superfície como as comumente estudadas em Geometria não proporcionam tal aplicabilidade. Assim, o conceito de continuidade e orientabilidade se fizeram presentes no projeto premiado.

Figura 4 - *Volorem quo illora*.
Fonte:https://arcoweb.com.br/noticias/internacional/na-china-ponte-sinuosa-tem-projeto-inspirado-pela-fita-de-mobius.

A Figura 5, a seguir, ilustra vista panorâmica da cidade.

Figura 5 - *Volorem quo illora*
Fonte:https://arcoweb.com.br/noticias/internacional/na-china-ponte-sinuosa-tem-projeto-inspirado-pela-fita-de-mobius

Uma segunda ilustração do uso da Banda de Möbius, na arquitetura, está na cidade inglesa de Bristol, histórica, a qual é repleta de atrações turísticas e de festivais. Uma das suas atrações é a ponte projetada com base nessa superfície (Figura 6), a exemplo do projetado da cidade chinesa. Ela fornece uma ligação que só pode ser transposta a pé entre o Finzels (localizado no centro de Bristol, Inglaterra, em um antigo local industrial), que ocupa a maior parte da margem sul do Bristol Floating Harbour entre as Pontes de Bristol e de São Filipe, através do rio de Castle Park.

Figura 6 - Ponte de Bristol
Fonte: https://sites.google.com/site/desmatematicos2/3d/cinta-de-moebius

Uso na indústria moveleira

No Brasil, há uma região rica na indústria moveleira, herança da imigração europeia. Nela se instalou a empresa Saccaro, há mais de 65 anos na produção de móveis. No site www.saccaro.com.br encontra-se um modelo de poltrona denominado ‘Ninho Moebius’ (Figura 7), que ilustra uma aplicação concreta da superfície em apreço no presente artigo. No ensino, algumas vezes, os professores têm dificuldades em ilustrar alguns elementos geométricos, sendo esee um exemplo de aplicação de um desses modelos fora da área da Matemática.

Figura 7 - Ninho Moebius
Fonte: http://www.saccaro.com.br/site20122/upload/produtos/8035_g.jpg

Na sequência do artigo, exploraremos o uso de Geometria Dinâmica, por meio do software GeoGebra 3D, uma vez que nos dias atuais não se pode prescindir, no ensino e na aprendizagem de Geometria, do uso dessa tecnologia, pois nossos alunos possuem, em geral, dispositivos móveis com potencial a ser explorado pelo professor.

O GeoGebra 3D e a Banda de Möbius

Com o advento da Geometria Dinâmica, os processos visuais se tornaram mais acessíveis para visualização de objetos espaciais. Um desses, que está em voga no momento, é o GeoGebra, o qual, na versão 5.0, apresenta a possibilidade de exploração no R3. No que segue, iremos explorar didaticamente uma construção disponível em https://www.geogebra.org/m/WYw8Buxh.

Os PCN indicam que a Geometria, quanto ao espaço e forma, tem apresentado pouco destaque no Ensino Fundamental, ao confundir seu ensino com o das medidas e indicam ser um “campo de problemas por envolver três objetos de natureza diferente: o espaço físico, ele próprio - ou seja, o domínio das materializações; a geometria, concebida como modelização desse espaço físico - domínio das figuras geométricas; o(s) sistemas de representação plana das figuras espaciais - domínio das representações gráficas.” (BRASIL, 2008, p. 122). Assim, embora a Base Nacional Comum- BNC esteja despontando, esse referencial ainda tem sido o documento norteador, por assim dizer, da escola básica e, portanto, faz sentido tê-lo como base por algum tempo.

Por sua vez, os PCNEM (BRASIL, 2000), ao indicarem que o aprendizado, tanto de professores, quanto de alunos, assim como seu aperfeiçoamento contínuo, necessitam ser construídos coletivamente, em espaço dialogado, e “Um dos pontos de partida para esse processo é tratar, como conteúdo do aprendizado matemático, científico e tecnológico, elementos do domínio vivencial dos educandos, da escola e de sua comunidade imediata. Isso não deve delimitar o alcance do conhecimento tratado, mas sim dar significado ao aprendizado desde seu início [...]” (p.7)

No que diz respeito à formação de professores da educação básica, as Diretrizes Curriculares Nacionais recomendam “o uso de tecnologias da informação e da comunicação e de metodologias, estratégias e materiais de apoio inovadores” (BRASIL, 2002, s.p.), o que nos levou a culminar o estudo e pesquisa do grupo, no ano de 2016, a respeito do tema Topologia com o uso do GeoGebra 3D na exploração da Banda de Möbius. No que segue, a partir do link apresentado acima, será explorada a Banda de Möbius, com atenção a uma propriedade fundamental da Topologia no que diz respeito às relações topológicas elementares para a representação do espaço, segundo Piaget e Inhelder (1993): uma quinta e última relação espacial é a relação de continuidade, no caso das linhas e das superfícies, o que iremos fazer na construção da Banda com as ferramentas do GeoGebra, a qual exemplifica, de forma muito simples, a passagem contínua ao longo da mesma.

Curvas e superfícies podem ser representadas algebricamente de diversas formas, sendo parametrização uma delas, a qual julgamos apropriada para nosso estudo. Uma curva é dada por uma parametrização a um parâmetro, enquanto superfícies, por dois parâmetros.

Por exemplo, a parametrização dada por f (t)=(cos(t), sen(t), t), com $t \in \mathbb{R}$, tem por representação gráfica a Figura 8, denominada hélice cilíndrica, a qual pode ser obtida no GeoGebra 3D com o seguinte comando: Curva[(cos(t), sen(t), t), t, -5, 5].

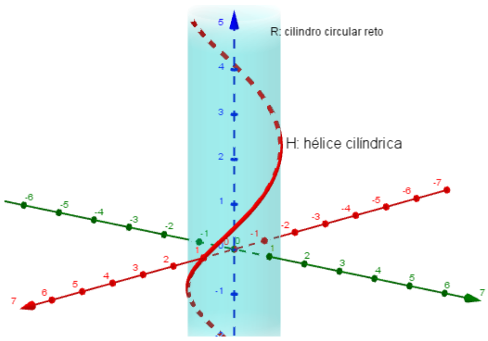
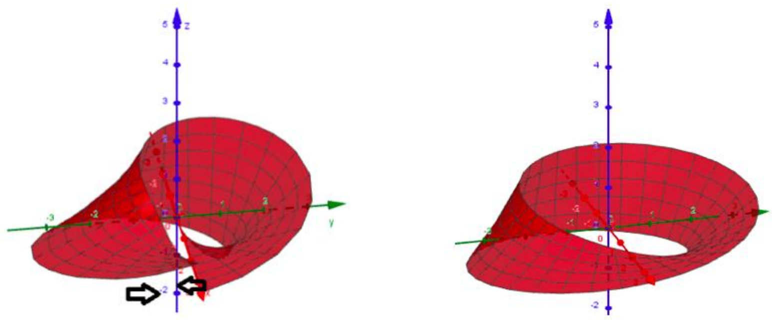


Figura 8 – hélice cilíndrica e cilindro circular reto.
Fonte: construção própria.

A parametrização dada por

$$S(s,r) = \begin{pmatrix} \cos(s)\left(2.7 + r\cos\left(1\cdot\frac{s}{2}\right)\right) \\ \text{sen}(s)\left(2.7 + r\cos\left(1\cdot\frac{s}{2}\right)\right) \\ r\,\text{sen}\left(1\cdot\frac{s}{2}\right) \end{pmatrix}$$

sendo (s,r) o par de parâmetros, ‘s’ o ângulo e ‘r’ a largura da faixa. Por sua vez, o comando S=Superfície[cos(s) (a+r cos(m (s/2))),sin(s) (a+r cos(m (s/2))), r sin(m (s/2)),s,0,6.28319,r,-ra,ra], quando digitado na janela de Entrada do GeoGebra, fornece a Banda de Möbius. Observamos que essa última é uma parametrização generalizada, sendo ‘a’ variável que indica o quanto mais aberta ou fechada ela se apresenta e ‘m’, o número de pontos de mudança de orientação ou de torções. A Figura 9(a) indica a Banda aberta em função da variação ‘a’ e as flechas em sentidos opostos indicam a mesma se fechando. Já a Figura 9(b) mostra a mesma fechada, ou seja, com o valor a=2, como indicado na parametrização particular com m=1, ambos fixos para melhor visualização. Note que nela os valores de s estão variando de 0 a 2π, enquanto r varia de –1 até 1.



(a) Banda aberta (b) Banda fechada

Figura 9 – Banda de Möbius aberta e fechada.
Fonte: construção própria.

Ao representarmos o plano XOY, na Figura 10, podemos perceber, com melhor visualização, a superfície passando para a parte inferior desse plano no ponto P, onde ocorre a torção, com a curva C1 em azul na parte superior do plano e a C2 na parte inferior.

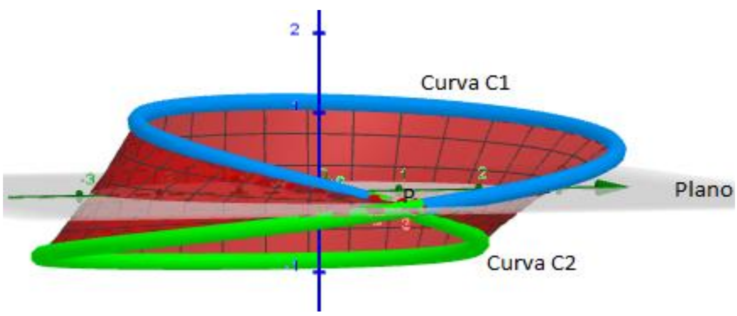


Figura 10 – Plano interseccionando a Banda de Möbius no ponto P com as bordas superior e inferior. Fonte: construção própria.

Com os comandos a seguir, obtemos, no GeoGebra, as curvas C1 e C2, antes de realizar a torção, ingressando na janela Entrada:

$$C1: \begin{cases} x = \cos(s)\left(2.7 + 1\cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right)\right) \\ y = \operatorname{sen}(s)\left(2.7 + 1\cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right)\right) \\ z = 1\operatorname{sen}\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \end{cases}$$

$$C2: \begin{cases} x = \cos(s)\left(2.7 - 1\cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right)\right) \\ y = \operatorname{sen}(s)\left(2.7 - 1\cos\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right)\right) \\ z = -1\operatorname{sen}\left(1 \cdot \frac{s}{2}\right) \end{cases}$$

ou em suas formas generalizadas,

C_1=curve[cos(s) (2+r cos(1.s/2)), sin(s) (2+rcos(m (1.s/2)),r sin(1s/2),s,0,6.28319];

C_2=Curve[cos(s) (2-r cos(1s/2)),sin(s) (2-r cos(1s/2)),-r sin(1s/2),s,0,6.28319].

Na sequência, analisaremos um referencial trirretângulo sobre a superfície, denominado Triedro de Frenét-Serret, o qual é móvel sobre a superfície, sendo constituído por um vetor tangente, um normal e um binormal. Ele é importante na visualização da mudança de orientação da superfície no ponto de torção. Para isto, criaremos um controle deslizante, t, com variação de 1 a 12, por exemplo, o qual fará com que o ponto A = (cos(t)(2+cos(t/2)),sin(t)(2+ cos(t/2)), t sin(t/2)) esteja sobre a borda superior e o ponto B = (cos(t)(2- cos(t/2)),sin(t)(2- cos(t/2)),-sin(t/2)), sobre a borda inferior. Conduziremos um plano perpendicular ao plano base, passando por A e por B; o ponto médio C do segmento AB e o ponto D=3(-sin(t),cos(t),0) + C. Criaremos u: Vetor[C,D] e v: Vetor [C,A]. O ponto E=C+(y(u)z(v)-z(u)y(v), z(u)x(v)-x(u)z(v), x(u)y(v)-y(u)x(v))/3 possibilita a construção do vetor w: vetor[CE].

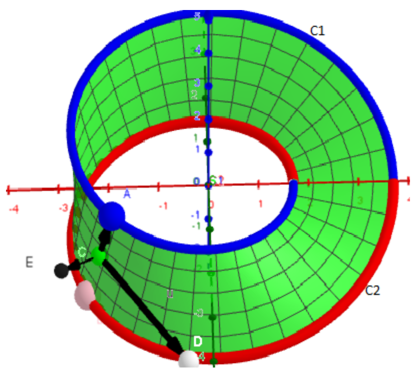


Figura 11 – Triedro de Frenét-Serret.
Fonte: construção própria.

A dinâmica do software permite a busca de melhor visualização do conjunto constituído pelo plano tangente à superfície (vetores [C,D] e [C,A]), no ponto C, e pelo vetor [C,E], denominado vetor normal. Facilmente, notamos que o vetor CD é tangente à superfície em C, enquanto que CA aponta para a curva superior, sendo-lhe perpendicular. Por sua vez, o vetor CE, ortogonal aos dois, está apontando para fora ou para o interior da superfície, conforme animamos o controle deslizante 't'.

Dessa forma, o dinamismo, ao fazer o ponto C percorrer a faixa, mostra que os vetores irão mudando suas direções e, particularmente, o vetor CE irá mudar de sentido, quando ocorrer a torção da superfície, identificando a continuidade dessa superfície, ou seja, é possível visualizar que ela perdeu sua orientabilidade, uma vez que tal vetor retorna ao ponto inicial com o sentido oposto ao de partida.

Atividades dessa natureza, envolvendo um conteúdo de difícil visualização, podem favorecer o ensino e a aprendizagem em Geometria. Gravina et al. (2015), ao abordarem a formação de professores com o uso efetivo de tecnologias na sala de aula, afirmam que

> [...] muitas das vezes os cursos de formação de professores para o uso de tecnologia possuem enfoque no desenvolvimento de esquemas de uso. Ou seja, a formação está centrada em 'ensinar ao professor como o software funciona'. No entanto, a formação deveria ser centrada no desenvolvimento de esquemas de ação instrumentada, para capacitar o professor na realização de tarefas com o artefato." (p.7)

Dessa forma, entendemos que o GEPGEO, com este estudo, possibilita novas faces para mudanças na formação e atuação do professor de Geometria, pois o artefato GeoGebra tem se mostrado um facilitador no processo de ensino e de aprendizagem em todos os níveis.

Considerações Finais

Neste artigo, apresentamos alguns resultados de estudos realizados, no ano de 2016, por um grupo de pesquisa em Geometria - GEPGEO, que teve por objetivo investigar possibilidades de uso e aplicações da Banda de Möbius em diversas áreas da Matemática e de outras áreas, como forma de inserir tal conteúdo no ensino de Geometria. Julgamos pertinente tal estudo no que diz respeito à Didática da Matemática, por se tratar de um conteúdo específico dentro da área de Geometria, usualmente não abordado na formação do professor, uma vez que estudantes, dos mais diversos níveis de escolaridade, questionam seus professores sobre onde aplica-los.

É objetivo do GEPGEO trazer ao debate, discutir e proporcionar, aos participantes desse grupo, possibilidades didáticas que os qualifiquem para o enfrentamento de tais questionamentos. Ao mesmo tempo, elaborar uma atividade, partindo de aplicações multidisciplinares, por meio de pesquisa bibliográfica-teórico-metodológica, até à chegada de representações visuais de uma superfície não trivial, a Banda de Möbius, por meio do software GeoGebra, em sua versão 3D, que proporcionou a visualização da não orientabilidade da mesma por meio do dinamismo do Triedro de Frenét-Serret.

Iniciamos com a obtenção dessa superfície, a partir de uma faixa de papel ou de tecido, para explorar um recurso didático concreto e a intuição, de modo a caracterizar uma superfície topológica unilateral. A partir disso, buscamos ligações interdisciplinares, identificando seu uso em obras literárias em que o autor estabelece um mote entre a escrita e a leitura, indicando a importância da relação entre o hipertexto e as práticas literárias de um grupo matemático-literário. Nelas, os autores ilustram a mistura entre as funções do personagem narrador e do leitor, em passagem contínua, de forma análoga ao que acontece com a superfície de Möbius. Seguimos estabelecendo conexão da Banda na obra de Lacan, na Psicanálise, quando a utiliza para explorar os diversos estágios da psique humana.

Mostramos, ainda, como a beleza visual da Banda é usada na arquitetura, em projetos monumentais explorando paisagismo/turismo, além da sua utilização na indústria moveleira. Para finalizar, exploramos construções geométricas no GeoGebra 3D com o objetivo de desenvolver habilidades visuais em que propriedades topológicas elementares são indicadas de modo a estimular o professor a elaborar atividades motivadoras para o ensino de Geometria nos diversos níveis de escolaridade.

Como finalização, este grupo de estudos e pesquisas em Geometria indica o uso da Topologia, por independer de medidas, como no caso da Geometria Euclidiana, para estimular/incentivar o ensino e aprendizagem de Geometria por meio de atividades intuitivas/exploratórias.

Também indicamos que o estudo da Geometria deveria iniciar pelas noções elementares da Topologia: vizinhança, separação, ordem, envolvimento e continuidade, em vez de fazê-lo pelas da Geometria Euclidiana. As primeiras independem de medida, o que é mais natural para a criança do que as propriedades da segunda.

Portanto, ao buscar aplicações da Banda de Möbius, uma superfície típica da Topologia, em várias áreas, observamos a importância da interdisciplinaridade necessária ao professor em sua prática profissional. Esperamos que o trabalho ofereça incentivo a novas pesquisas e, principalmente, seja elemento motivador para a inclusão do assunto nos currículos da Licenciatura em Matemática.

Referências

ALMOULOUD, S. Ag. Modelo de ensino/aprendizagem baseado em situações-problema: aspectos teóricos e metodológicos. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.11, n. 2, p. 109-141, 2016.

ARAÚJO, P. V. **Geometria Diferencial**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro. 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasilia: MEC/SEF. 148p. 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio). Brasilia: MEC/SEF. 109p. 2000

BRASIL. **Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de Licenciatura, de graduação plena**. Resolução n.11 de 18 de fevereiro de 2002.

DIENES, Z. P., GOLDING, E.W. **A Geometria pelas transformações I**: Topologia, Geometria Projetiva e Afim, 1. reimpressão. São Paulo: E.P.U. Editora Pedagógica e Universitária Ltda. 1975.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática** – percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados. 2006.

GRAVINA, M.A et. al. Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula. **Revista Renote Novas Tecnologias na Educação**. v. 13 n.2, dezembro, 2015.

MAGELA, G. M. Psicanálise e Topologia – escritura do dizer analítica (conversando com Geraldo Majela Martins. **Revista da Matemática. FACET – UNICENTRO NEWTON PAIVA**. Ano 2, n.2, 1998, pp. 5-11.

MOREIRA, M.A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 2009.

MOREIRA, M.E.R. E FUX, J. **Letras de Hoje**. Porto Alegre, v. 45, n. 2, p. 62-70, abr./jun. 2010.

PIAGET, J. ; INHELDER, B. A representação do espaço na criança. Porto Alegre: **Artes Médicas**. 1993.

PORGE, E. **Fundamentos da clínica psicanalítica**. Campinas, SP: Mercado das Letras. 2014.

SILVA, D.C. DA; LEIVAS, J.C.P. GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO PARA DEFICIENTE VISUAL. **Anais…** Matemática na escola: dez anos do PPGEMAT -UFRGS- 20-22 out. 2014. Porto Alegres, RS.

LEITE, M. P. de S. **Psicanálise Lacaniana**: cinco seminários para analistas kleinianos. São Paulo: Iluminuras, 2010.