RESOLUCIÓN Y FORMULACIÓN DE PROBLEMAS

RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

PROBLEM SOLVING AND PROBLEM POSING

Jose Carrillo Yanez

Universidade de Huelva, Espanha, carrillo@ddcc.uhu.es

Resumen

La Resolución de problemas y la Formulación de problemas se sitúan en la esencia del quehacer matemático. Asimismo, ambas suelen contemplarse en las recomendaciones curriculares en todos los países como tareas que promueven un aprendizaje con comprensión de los alumnos. En este artículo se presenta una reflexión sobre la actualidad de las investigaciones y preocupaciones del profesorado en relación con la necesidad de que Resolución de problemas y Formulación de problemas ocupen un papel relevante en el aula de matemáticas. Se muestra un ejemplo de trabajo en un grupo colaborativo de desarrollo profesional en el que los profesores y los investigadores reflexionan sobre las demandas de un problema y la influencia de la representación en el abordaje de dicho problema. A continuación se reflexiona sobre las oportunidades que brindan *malos* y *buenos* enunciados para construir aprendizaje matemático. Perplejidad, interés por parte del resolutor, indagación y deliberación emergen como características esenciales de problemas e investigaciones matemáticas.

Palabras clave: resolución de problemas, formulación de problemas, investigaciones, desarrollo profesional

Abstract

Problem solving and problem posing are at the core of the mathematical work. Moreover, both are included in syllabi recommendations all over the world as tasks which promote a comprehensive learning in pupils. In this paper one reflects on the present of investigations and teachers' concerns in relation to the need that problem solving and problem posing place a major role in the mathematics classroom. One shows an example of how a professional development collaborative group deal with a problem's demands and the influence of representations in tackling that problem. Next reflection moves to opportunities that *bad* and *good* statements give to build mathematical learning. Perplexity, interest by the solver, inquiry and deliberation rise up as crucial characteristics of problems and investigations.

Keywords: problem solving, problem posing, investigations, professional development

Introducción

Puede decirse que la Resolución de Problemas (RP) y la Formulación de Problemas (FP) son una preocupación de profesores e investigadores. Muchas son las preguntas e inquietudes que se ciernen sobre profesores e investigadores en relación con la puesta en práctica de ambas y la indagación sobre sus características de cara a favorecer dicha puesta en práctica y, a través de ella, un aprendizaje significativo en el alumnado.

Si acudimos a la literatura de investigación sobre RP y FP, podemos extraer algunas dimensiones, muchas de las cuales son compartidas por el profesorado: Formas de evaluar la RP; El uso de heurísticos y otras estrategias en la RP; Tipos de problemas; Aplicación de técnicas en la RP; Comportamiento del resolutor (conducta, actitud, etc.); Aspectos cognitivos y metacognitivos; RP y las TICs; Habilidades comunicativas; Grado de comprensión del alumnado; Método de razonamiento (directo o inverso); Uso de conjeturas y patrones en la RP; Recursos empleados por el alumnado en la RP; Distintos tipos de representación (distintos tipos de lenguaje); Análisis de errores en la RP y la FP; La demostración, la argumentación y la RP; Habilidades del resolutor; Concepciones del profesor sobre RP; Formulación del problema (problem posing); La enseñanza a través de la RP; Competencias matemáticas; La enseñanza de RP como contenido matemático; Cómo refleja el currículum la RP; Aspectos socio-culturales en la RP…

No obstante, llegado el momento de la planificación, del diseño o la selección de tareas (problemas), esas dimensiones se simplifican y, aproximadamente, adquieren la forma de las siguientes preguntas para el profesor: ¿cómo puedo enseñar este contenido a través de RP?, ¿qué problemas son buenos?, ¿cómo gestiono el aula para promover un buen entorno de aprendizaje?

Recuerdo conversaciones con algunos profesores (participantes en actividades de formación continua) en las que estos afirman que la RP no es una estrategia metodológica adecuada para aprender matemáticas, pues olvida los contenidos para centrarse en estrategias (heurísticos) que en muchas ocasiones no permiten enfrentarse a problemas de envergadura. Para ellos, por tanto, la investigación en RP como estrategia metodológica en el aula de matemáticas no es relevante.

Es probable que estos colegas tengan la experiencia de una puesta en práctica de la RP como mero juego con el objetivo de ocupar unas horas (unas clases) para las que no se tiene una adecuada planificación. A ellos les digo que revisen, entre otros, los trabajos de Onuchic *et al.* (2014), para apreciar la evolución de los estudios sobre RP y su aportación teórica y para la práctica del profesor de cualquier nivel educativo. O que consulten Brum y Santos-Wagner (2015) para reflexionar sobre la formación de los futuros profesores, Serrazina y Ribeiro (2012) para conocer cómo las tareas de RP favorecen las habilidades comunicativas y el raciocinio matemático, Carrillo y Contreras (2000) para obtener una visión de los intereses actuales sobre RP en el plano internacional, Carrillo (1998) para ver cómo pueden conseguirse determinados objetivos de aprendizaje a través de la RP, Carrillo (2000) para acercarse a la construcción de conocimiento por parte del profesor a través de la RP, Fernández-Gago y Carrillo (2014), donde se integra la perspectiva de la RP con la Teoría de la Inteligencia Creadora, Reséndiz, Block y Carrillo

(2017), donde se presenta una experiencia de RP en condiciones nada favorables, como las escuelas multigrado unitarias en México, y Cruz y Carrillo (2004) para reflexionar sobre lo que aprenden los alumnos en relación con la RP tras años de escolaridad. Estos colegas pueden también revisar los nº 5 y 6 del volumen 39 de la revista ZDM del año 2007, y los números 3 y 4 del volumen 24 de la revista Journal of Mathematical Behavior del año 2005, ambos dedicados exclusivamente a la RP, aportando el primero una panorámica internacional. O que lean Felmer, Pehkonen y Kilpatrick (2016), Singer, Ellerton y Cai (2015) o el número 1 del volumen 83 de la revista Educational Studies in Mathematics del año 2013, publicaciones dedicadas a RP y a la formulación de problemas (FP), para sumergirse en la importancia que tienen la RP y la FP en el aprendizaje matemático.

Ya en los años 90 del siglo pasado, Lester (1994) exponía la aparente falta de interés en las investigaciones sobre RP. Sin embargo, más adelante en el mismo artículo añadía que en ocasiones RP se identificaba con constructivismo y, de este modo, las investigaciones sobre RP se veían inmersas en aquellas sobre constructivismo. Por ello, concluía, la falta de interés era solo aparente.

La RP siempre ha existido, pues siempre han existido problemas (matemáticos). En la escuela, la RP, sin embargo, cede frecuentemente su rol a la resolución de ejercicios (o problemas rutinarios). Pero esto no puede ser excusa para una falta de interés por parte de los investigadores (y los formadores) en la RP.

A los profesores les pregunto qué quieren que aprendan sus alumnos. Si quieren que aprendan matemáticas con comprensión, que experimenten la creación de conocimiento matemático, entonces tendrán que proponer problemas a sus alumnos. Si lo que quieren es que sus alumnos repitan memorísticamente unos hechos y reglas, entonces hagan ejercicios. Ahora bien, piensen si realmente están enseñando matemáticas. Como decía Skemp (1978), no se trata de dos formas de aprender matemáticas, sino de dos materias (matemáticas) distintas, como si de dos asignaturas diferentes se tratara. Una vez respondida esta pregunta, tiene sentido enfrentarse a las preguntas que formulaba inicialmente.

Pero, además, la RP trasciende el hecho de ser una estrategia metodológica (como vehículo del aprendizaje de las matemáticas) para ser también un contenido matemático y una finalidad de las matemáticas, ya que las propias matemáticas adquieren sentido y relevancia por su enfrentamiento a problemas. Y en este proceso cobra significado la FP.

Mi propósito en este artículo es presentar una reflexión sobre las características de nuestra actividad cuando resolvemos y formulamos problemas. Para ello, se recurrirá a la literatura de investigación, a experiencias con el profesorado y el alumnado, y a la propia introspección.

Primeros elementos y preguntas en torno a la resolución y a la formulación de problemas

Pólya (1945), a quien se debe el interés moderno hacia la RP, consideraba la FP en su propuesta de heurísticos en la fase de verificación (mirar atrás) del proceso de RP, particularmente por aplicación del heurístico de generalización. Por su parte, Bransford y

Stein (1984) consideraban una fase inicial, anterior a la fase de comprensión del problema, que llamaron *identificación*, en la que el resolutor identifica una situación como problemática y la convierte en un problema. Esta fase es inusual en el contexto escolar, donde los problemas son formulados por el profesor (o extraídos de un libro de texto) y presentados a los alumnos (sin embargo, es usual en un enfoque basado en competencias básicas o basado en el abordaje de proyectos).

Efectivamente, como contemplan estos autores, la FP consiste en formular problemas basados en situaciones que nos resultan problemáticas, pero esto no atañe solo al comienzo del proceso de RP, sino a todo el proceso. Más aún, la FP es una actitud, una forma de entender aprender y hacer matemáticas, un gran reto al que estudiantes y profesores se enfrentan si lo desean.

Y vuelven las preguntas, que son las que guían nuestro quehacer docente e investigador, y la relación que los estudiantes establecen con las matemáticas. Como profesor, ¿qué deseo que aprendan mis alumnos? Como estudiante, ¿hasta qué punto deseo implicarme en una aventura que incluye retos y dificultades, al tiempo que el posible gozo de construir conocimiento que me capacite para resolver problemas (matemáticos y no matemáticos) y me permita desarrollarme intelectual y personalmente?

¿Y los investigadores qué se preguntan? Lester (1994) propone tres temas de interés para la investigación en RP desde el punto de vista de la RP como metodología (*enseñar a través de la RP*): el papel del profesor en un aula centrada en RP, lo que sucede realmente en tal aula, y focalización en grupos más que en individuos.

Estos tres temas enunciados por Lester (1994) se corresponden con las orientaciones curriculares de las reformas educativas a nivel internacional. Basta revisar los números antes citados del ZDM de 2007 para percatarse de los aspectos comunes y de las diferencias que existen entre diferentes países en relación con la puesta en práctica de la RP en las aulas y la investigación sobre ello. Pero, en cualquier caso, es patente la visión compartida de que la enseñanza de las matemáticas se base en la RP, que el profesor sea un guía en el proceso de aprendizaje y que dicha enseñanza se destine a todos, no solo a los alumnos más aventajados.

Por otra parte, una revisión del libro también mencionado anteriormente de Felmer *et al* (2016) nos indica la ingente cantidad de dimensiones de la Educación Matemática que se relacionan con la RP, entre ellas el análisis de libros de texto, los afectos, o el uso de tecnologías digitales. Y asimismo, aparece de manera recurrente la dificultad de caracterizar problema, concluyéndose en ocasiones (con lo cual coincido) que RP e investigaciones deberían enfocarse simultáneamente, tanto desde un punto de vista docente como investigador.

Al sumergirnos en una investigación en el aula (por ejemplo, “estudiemos polígonos regulares”), nos situamos o demandamos de nuestros estudiantes una actitud semejante a cuando les planteamos un problema abierto. En ambos casos, los estudiantes han de delimitar el alcance de su resolución, deben acotar las variables a considerar, y deben involucrarse de forma activa (no me refiero a que se muevan, sino a que muevan sus mentes). Factores afectivos, por tanto, desempeñan un importante papel, así como elementos metacognitivos, ambos actualmente incluidos entre las dimensiones que entran en juego en el proceso de RP y FP (SCHOENFELD, 1992). ¿Y qué es lo que realmente subyace a investigaciones y RP? Diría, siguiendo a Kilpatrick (2016), que es la indagación (*inquiry*). Kilpatrick señala que, de acuerdo con Duncker (gestaltista) y Pólya, resolvemos problemas en un proceso consistente en la aplicación de estrategias heurísticas que sirven para llevarnos de la situación inicial (de incertidumbre, fracaso) a la situación final (al éxito). La indagación posee su esqueleto en las estrategias heurísticas.

Cierto, la indagación es parte de la esencia de los procesos de RP, pero a esto añadiría algo que, aunque habitualmente no figura en las caracterizaciones de RP o de problema, pienso que subyace a todas o casi todas: la deliberación. A veces, es difícil diferenciar entre problema y no problema, pero creo que podemos soslayar esa dificultad preguntándonos si tal actividad matemática requiere deliberación por parte del resolutor. ¿No es eso en verdad lo que como profesores nos interesa fomentar en nuestros alumnos? ¿No es realmente la capacidad de tomar decisiones fundamentadas una de las competencias que queremos desarrollar en nuestros estudiantes? Y como investigadores, ¿no estamos interesados en profundizar en todos los elementos del proceso de RP? No nos es suficiente con reflexionar sobre el conocimiento matemático implicado en el problema, ni sobre las estrategias heurísticas empleadas o plausibles, ni sobre las creencias y actitudes del resolutor, ni sobre la influencia del trabajo colaborativo, ni sobre las situaciones contextuales del aula o del centro educativo, ni sobre los factores metacognitivos (en particular los del control del proceso), sino sobre todo ello conjuntamente; y, de todo ello, subrayo indagación y deliberación como características esenciales del proceso de RP.

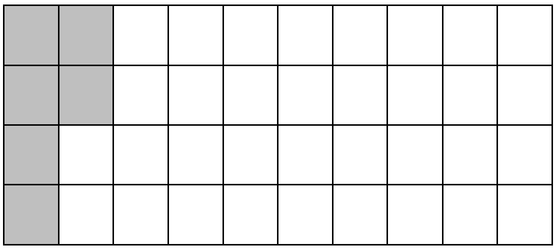
La deliberación, la toma de decisiones, me permite enlazar con el proceso de FP. Al formular problemas hemos de tomar decisiones: ¿qué aspecto de la situación que tengo delante es abordable o tiene sentido o interés?, ¿qué dimensiones quiero considerar en esta solución para plantearme una extensión o una generalización del problema?, como profesor ¿qué quiero alterar en el enunciado del problema y en función de qué objetivos de aprendizaje? En la siguiente sección se presentará la discusión alrededor de un problema por parte de un grupo colaborativo de profesores, poniendo de manifiesto las reflexiones de estos en relación con los objetivos del problema.

Profesores frente al problema de los cuadraditos sombreados

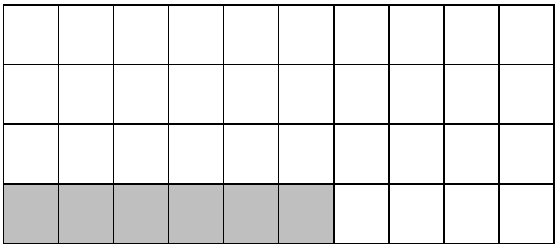
Veamos el siguiente conocido problema: *En un rectángulo 4x10 hay 6 cuadraditos sombreados. Expresa qué parte del rectángulo es la parte sombreada como porcentaje, luego como decimal y finalmente como fracción*.

Este problema fue discutido en una de las reuniones del PIC (Proyecto de Investigación Colaborativa). El PIC es un grupo compuesto por maestros y estudiantes para maestro, profesores de secundaria, estudiantes de máster y doctorado, una inspectora de educación e investigadores.

Se apreció un poco de desasosiego e incomodidad, a pesar de ser un problema fácil para todos. Parecía que la forma "más natural" de resolverlo era usando la fracción 6/40 y, sin embargo, se pedía empezar por el porcentaje. ¿Por qué? Decidimos dibujar el rectángulo y surgieron diferentes formas (figura 1).



a)



b)

Figura 1: Representación del rectángulo 4x10 con 6 cuadraditos sombreados

Mientras que los que habían usado la representación b mantenían que era más fácil empezar por la fracción, los que emplearon la representación a dijeron que la zona sombreada representaba 1.5 columnas del total de 10, es decir, un 15%, o sea, 0.15 en forma decimal, o 15/100 como fracción. Coincidimos en que la representación condicionaba el orden en el abordaje del problema (en realidad, la naturaleza problemática de esta tarea, para los participantes en el PIC, no procede de la demanda matemática, sino del sentido del enunciado). Esto nos llevó a plantear la figura 2 como una forma de representar el enunciado que, además de no ser habitual, no induciría tampoco a comenzar por el porcentaje, a menos que fuera una condición obligatoria para su resolución.

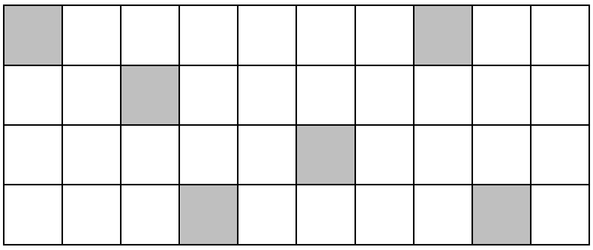


Figura 2: Representación no habitual del rectángulo 4x10 con 6 cuadraditos sombreados

Y entonces nos preguntamos si el enunciado estaría así organizado para forzar el uso de una determinada representación. Pero, ¿cuál sería el objetivo de usar esa representación (figura 1a) más allá del propio problema?

Es evidente que el hecho de que haya 10 columnas facilita el cálculo. Con otro número se complicaría la resolución. Pongamos, por ejemplo, 6 cuadraditos en un rectángulo 4x8 (figura 3).

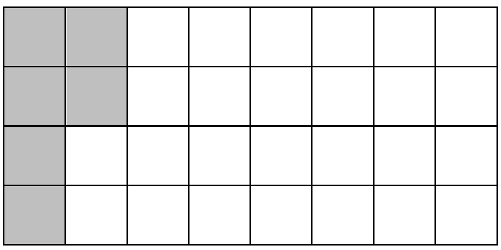


Figura 3: Representación del rectángulo 4x8 con 6 cuadraditos sombreados

Ahora vuelve a ser natural expresar la parte sombreada como 6/32, que no posee ninguna fracción equivalente de denominador 100, a diferencia de lo que sucede con 6/40, que es equivalente a 3/20 y a 15/100.

Plantearnos los requisitos ocultos y las limitaciones del enunciado fue un medio para abordar la RP y la FP, así como para reflexionar sobre la idoneidad del enunciado en función del nivel educativo. Algunos miembros verbalizaron, con satisfacción, el juego que había dado el análisis de un "mal" enunciado.

En cuanto a la idoneidad mencionada, estoy convencido de que estos problemas son adecuados para la etapa de Educación Primaria. La reflexión con los alumnos de la influencia de la representación en la facilitación de la resolución de un problema es valiosa para hacerles ver la necesidad de que intenten emplear diferentes representaciones hasta que alguna de ellas les aporte ideas relevantes. Asimismo, conviene reflexionar sobre la elegancia matemática (pasar de 6/40 a 15/100 a través de 3/20 es más elegante que plantearse la ecuación 6/40 = x/100 o la regla de tres) y la adecuación (trascendiendo de nuevo el propio contexto del problema) de las distintas expresiones al contexto (la altura de un jugador de baloncesto se suele expresar como decimal, la porción de tableta de chocolate como fracción, la cantidad de calcio en una botella de leche en porcentaje).

Los *malos* enunciados

En Pólya (1945) podemos ver el problema “Un pájaro entra en el aula. ¿Qué hacer?”. He propuesto varias veces este problema y en diferentes contextos: a alumnos de 12 años, a profesores en una actividad de formación continua, a estudiantes de nuestro máster de investigación.

Algunos alumnos respondieron que lo que ellos harían sería aprovechar para jugar con el pájaro y así perder la clase de matemáticas. Algunos profesores se sorprendieron y dijeron que eso no era un problema de matemáticas. Todos mostraron perplejidad. ¿No es esta una característica que se supone deben poseer los problemas (y las investigaciones)?

Se ha mencionado antes la indagación y la deliberación como características esenciales de la RP y la FP, pero estas características se nutren de la combinación de, al menos, perplejidad (para hacer problemática la situación) e interés (para implicar al resolutor en la RP y la FP).

Para resolver el problema del pájaro necesitamos definir unos objetivos: perder el tiempo o intentar que se vaya son algunos posibles. El objetivo condicionará el problema, del mismo modo que las condiciones ambientales o contextuales. Como versión matemática libre del problema del pájaro, planteé hace años el problema “Policías y ladrones”: *En un banco entra una banda de ladrones. Los rostros de empleados y clientes se mimetizan con el blanco del mármol. Al cabo de unos minutos salen los ladrones con el botín. ¿Cogerá la policía a los ladrones?*

Hemos propuesto este problema a profesores de secundaria en contextos de formación continua y a alumnos de secundaria. La riqueza de las reflexiones y planteamientos de ambos grupos ha sido excelente.

Normalmente, los profesores proponen problemas en los que los datos son suficientes, están pensados para resolver ese problema, se deben usar todos, pero ¿cómo procuramos que nuestros alumnos reflexionen sobre la adecuación y la justificación de cada uno de esos datos? Problemas como el anterior fuerzan a los resolutores (estudiantes o profesores) a pensar en los datos y condiciones que son necesarios para domesticar la situación, para modelizarla matemáticamente.

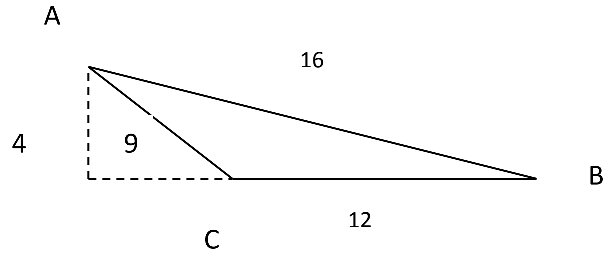
El tiempo desde que la policía es avisada hasta que puede ponerse en marcha para perseguir a la banda, la distancia entre la comisaría más cercana y el banco, las rutas de acceso al banco, y las de escapada, la velocidad de los vehículos de ladrones y policía, la posibilidad de ayuda de la policía de otros lugares, la distancia desde el banco a la frontera (suponiendo que eso signifique la salvación para los ladrones)… son algunas variables y condiciones que surgieron en la puesta en común para tener en cuenta a la hora de afrontar la resolución de este problema (o investigación). Una vez concretadas o acotadas estas variables, aparecieron modelizaciones funcionales, planteando sistemas de ecuaciones lineales e incluso ecuaciones diferenciales.

En este proceso, los resolutores han de formular sus problemas, una vez que han acotado las variables. Es así que enfrentarse a estas situaciones genera oportunidades para la FP. Si el profesor sabe gestionar la amplitud asociada a estas situaciones, dará la oportunidad a sus alumnos de profundizar en el contenido matemático de un modo significativo, de generar sus propios problemas, en definitiva, de hacer matemáticas, no solo de consumirlas con el propósito de pasar un examen.

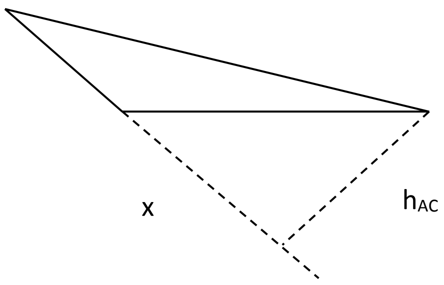
Los *buenos* enunciados

En la sección anterior hemos visto cómo *malos* enunciados podían generar una gran riqueza matemática. Y pongo malos en cursiva porque, realmente, ¿cómo puede ser un enunciado malo si da lugar a aprender matemáticas con comprensión? Su primera apariencia de mal enunciado se transforma luego en origen de un buen proceso de aprendizaje. Veamos ahora el caso de los problemas que, aparentemente, están bien enunciados; sin embargo, encierran alguna sorpresa en su interior.

Enunciado: *Halla lo que mide exactamente la altura del triángulo ABC relativa al lado AC.*



El enunciado nos da las medidas AC=9 u, CB=12 u, AB=16 u, h_{CB}=4 u.



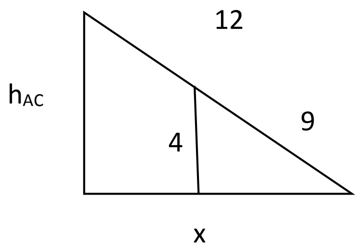
Podemos plantear el siguiente sistema de ecuaciones:

$$h_{AC}^2 + (9 + x)^2 = 16^2$$

$$h_{AC}^2 + x^2 = 12^2$$

Restando la segunda ecuación a la primera, se obtiene $9^2 + 18x = 16^2 - 12^2$, de donde $x = \frac{31}{18}\, u$ y $h_{AC} \cong 11{,}94\, u$.

Pero también podemos resolver el problema basándonos en que los dos triángulos punteados de las figuras anteriores son semejantes[1].



En este caso tenemos $\frac{h_{AC}}{4} = \frac{12}{9}$, de donde $h_{AC} = \frac{16}{3}\, u$.

Por otra parte, aplicando la constante del área, podemos considerar la ecuación $9h_{AC} = 12 \times 4$, cuya solución coincide con la anterior.

Algo sucede, salen dos soluciones distintas, a pesar de que ambas resoluciones son correctas. Efectivamente, pero en ninguna de las resoluciones se han empleado todos los datos. El asunto es que los datos del problema son incompatibles: que si los lados miden 9, 12 y 16 u, entonces la altura dada no puede ser 4 u, o si la altura dada es 4 u, la terna de longitudes de los lados no puede ser 9, 12, 16 u.

En ocasiones, los libros de texto, o nosotros mismos, con idea de facilitar el cálculo a nuestros alumnos, incluimos datos abundantes en los enunciados. En este caso, sabemos que un triángulo queda determinado por la longitud de sus lados, por lo que la longitud de la altura no puede ser arbitraria.

Planteo este problema cada año a los futuros profesores de primaria, y algunas veces a los estudiantes del máster (graduados en magisterio o en matemáticas en su

[1] No se realizan las representaciones a escala de manera intencionada, para anteponer el argumento matemático al poder de la apariencia de la figura.

mayoría) y asimismo se ha llevado a clases de secundaria. De nuevo surge la perplejidad, la cual motiva la indagación: ¿qué ocurre?, ¿cómo es posible que pueda haber dos soluciones distintas? Raras veces piensan que el enunciado pueda incluir un conjunto incompatible de datos y condiciones. Pero este tipo de situaciones no es infrecuente en la vida cotidiana, en la que, a veces, queremos algo que es imposible (por ejemplo, un vehículo nuevo, deportivo, que consuma poco y sea barato, o una casa con energía eficiente, económica y situada en el centro de la ciudad).

La reflexión sobre este problema es muy rica desde el contenido matemático. Tres abordajes distintos aparecen: sistema de ecuaciones, semejanza de triángulos, y constante del área. Además, surge la idea de la determinación de un triángulo exclusivamente con las longitudes de sus lados. Pero esto conduce (FP) a plantearnos si sucede lo mismo en los demás polígonos: ¿quedará un cuadrilátero también determinado por sus lados?, ¿y un pentágono?, ¿cómo se puede determinar mínimamente un polígono?... Un problema nos conduce, de este modo, a través de la FP, a una investigación. Como decía Alan Schoenfeld en un curso que impartió en Granada (España), un problema nunca acaba.

La preocupación de profesores e investigadores

Como se indicaba al comienzo, en su quehacer cotidiano, el profesor se plantea las siguientes preguntas: ¿cómo puedo enseñar este contenido a través de RP?, ¿qué problemas son buenos?, ¿cómo gestiono el aula para promover un buen entorno de aprendizaje?

Es evidente que las respuestas a estas preguntas no proceden exclusivamente del campo de la Educación Matemática, ya que aspectos pedagógicos generales, entre otros, entran necesariamente en juego en cualquier situación educativa. Sin embargo, nos centraremos en la discusión en nuestro campo. Y lo vamos a hacer con un ejemplo, el planteamiento de una cuestión sencilla que permite abordar contenidos no tan sencillos.

La actividad se titula “¿Sabemos contar?”. Comienza solicitando contar de 1 en 1 a los alumnos, señalando alumnos concretos. Se inicia la ronda de alumnos y se corta para que cuenten ahora de 2 en 2, luego de 3 en 3. A continuación se plantea la siguiente pregunta: ¿Podemos llegar al 10 contando de 2 en 2 a partir del 0? ¿Y de 3 en 3? ¿Cómo tenemos que contar para llegar al 13? Finalmente se pide que formulen problemas (que se hagan preguntas).

Pueden surgir varias preguntas que, reformuladas en ocasiones por el profesor, nos llevan a las siguientes: ¿Cómo son los números a los que llegamos de 2 en 2 partiendo del 0? ¿Y a los que llegamos de 3 en 3, 4 en 4, 5 en 5…? ¿Hay más números como el 13?

Partiendo por contar de 1 en 1 se llega a abordar criterios de divisibilidad, pero no se queda ahí el desarrollo de esta actividad, pues se plantean preguntas como las que siguen: ¿Cómo podemos contar los niños que hay en el patio a la hora de entrar al cole? O las personas que participan en una manifestación. O los asientos de un teatro. ¿Y los pájaros que hay en una bandada? O los peces en un estanque. Ahora el asunto es aproximarse a modos de contar que, a veces, no va a producir un resultado que nos dé certeza de exactitud. En efecto, es fácil contar los asientos de un teatro, pero no las personas en una manifestación. Procedimientos de reticulado, estadísticos y probabilísticos entran en juego, llevándonos a plantear ¿cómo de exactas son las matemáticas?

La RP y la FP, en una atmósfera de libertad de opinión, fomentan la creatividad, la cooperación entre iguales, una actitud crítica y proactiva, promueve la reflexión sobre el propio aprendizaje y sobre la naturaleza de las matemáticas y su relación con la vida cotidiana y sus problemas.

A fin de cuentas, ¿qué hacemos al resolver y formular problemas (como profesores y como estudiantes)?, ¿en qué consiste nuestro quehacer en esos momentos? Pues, quizás, la respuesta a estas preguntas sea “no se sabe”. Ciertamente, no se sabe por completo, ya que, como toda actividad humana, es muy compleja, intervienen muchos factores, es ilusorio pensar que podemos abarcarla y comprenderla exhaustivamente. Pero no es menos cierto que podemos hacer aportaciones relevantes al respecto. Indagación, deliberación, perplejidad, creatividad, motivación, comprensión profunda, extensión de los enunciados, reflexión sobre los resultados, importancia de la RP y la FP en el desarrollo del conocimiento matemático y en el desarrollo personal son solo algunas nociones e ideas que se han presentado. Tanto la literatura de investigación, como la experiencia del profesorado y del alumnado, así como la propia introspección, nos aportan ideas para responder esas preguntas. Esto es lo que he tratado de hacer en este artículo.

Referencias

BRANSFORD, J.D., & STEIN, B.S. **The IDEAL problem solver**. New York: Freeman and Company, 1984

BRUM, J. M., & SANTOS-WAGNER, V. Acertos e erros de futuros docentes dos anos iniciais ao resolverem um problema não rotineiro de divisão. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, n. 5, p. 297-314, 2015

CARRILLO, J. La Resolución de Problemas en la Enseñanza Secundaria. Ejemplificaciones del para qué. **Epsilon**, n. 40, p. 15-26, 1998.

CARRILLO, J. Aportaciones desde la resolución de problemas a la construcción de conocimiento profesional. **Quadrante**, v. 9, n. 2, p. 27-54, 2000.

CARRILLO, J. & CONTRERAS, L.C. (Eds.). **Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos**. Huelva (Espanha): Hergué, 2000.

CRUZ, J. & CARRILLO, J. **¿Qué aprenden los alumnos para la resolución de problemas?** En J. Giménez, L. Santos & J.P. da Ponte (Coords.), La actividad matemática en el aula. Barcelona (Espanha): Graó, p. 103-115, 2004.

Educational Studies in Mathematics (2013), 83(1)

FELMER, P., PEHKONEN, E., & KILPATRICK, J. (Eds.). **Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives**. New York: Springer, 2016.

FERNÁNDEZ-GAGO, J. & CARRILLO, J. Cómo se Esfuerzan los Alumnos en Resolución de Problemas Matemáticos. **Bolema**, v. 28, n. 48, p.149-168, 2014.

Journal of Mathematical Behavior (2005), 24(3 y 4)

KILPATRICK, J. **Reformulating: Approaching Mathematical Problem Solving as Inquiry**. En P. Felmer, E. Pehkonen, & J. Kilpatrick, J. (Eds.), Posing and Solving Mathematical Problems. Advances and New Perspectives. New York: Springer, p. 69-81, 2016.

LESTER, F.K. Musing about mathematical problem-solving research: 1970-1994. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 25, n. 6, p. 660-675, 1994.

ONUCHIC, L., ALLEVATO, N., NOGUTI, F., & JUSTULIN, A. (Orgs.) (2014). **Resoluçao de problemas: Teoria e Prática**. Jundiaí, Brasil: Paco Editorial.

PÓLYA, G. **How to solve it**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

RESÉNDIZ, L., BLOCK, D., & CARRILLO, J. (). Una clase de matemáticas sobre problemas de aplicación, en una escuela multigrado unitaria. Un estudio de caso. **Educación Matemática**, v. 29, n. 2, p. 99-123, 2017.

SCHOENFELD, A.H. **Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics**. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, p. 334-370, 1992.

SERRAZINA, L., & RIBEIRO, D. As interações na atividade de resolução de problemas e o desenvolvimento da capacidade de comunicar no ensino básico. **Bolema**, v. 26, n. 44, p. 1367-1394, 2012.

SINGER, F.M., ELLERTON, N.F., & CAI, J. (Eds.). **Mathematical Problem Posing. From Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015.

SKEMP, R. R. Relational understanding and instrumental understanding. **Arithmetic Teacher**, v. 26, n. 3, p. 9-15, 1978.

ZDM (2007), 39(5 y 6)

Submissão: 22/11/2017

Aceite: 27/03/2018